

平成 30 年 5 月 17 日現在

機関番号：24403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K05005

研究課題名(和文)人口の流出・集中を表す空間的進化ゲームの数理解析的・数値解析的研究

研究課題名(英文) Mathematical and numerical research on evolutionary games that describe population concentration and outflow

研究代表者

田畑 稔 (TABATA, Minoru)

大阪府立大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：70207215

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：空間経済学は地理学と経済学の境界分野である。その目的は経済活動や経済資源の地理的分布を研究することである。この分野の一つであるNEGでは多くの重要な非線型モデルが構築されている。その中でも特に重要なのがクルーグマンの核周辺モデルである。その均衡解は同モデルの賃金方程式の解として定義される。賃金方程式は全く新しい非線型積分方程式であり、今まで十分に研究されてこなかった。この方程式の非線型積分核それ自身が別の非線型積分作用素で表現されるという意味で、二重非線形構造を持っている。本研究ではその特殊な非線型構造を解析することにより、最も一般的な条件の下で賃金方程式の解の存在を証明した。

研究成果の概要(英文)：Spatial economics is an interdisciplinary area between economics and geography. Its purpose is to study the allocation of resources over space and the location of economic activity. Among many important nonlinear models in the NEG, one of the most fundamental models is the Krugman's Core-Periphery model. Each equilibrium of the continuous model is defined as a solution to the wage equation, which is a singular nonlinear integral equation. The wage equation is quite a new kind of integral equation that has not been fully studied mathematically. We must note that the wage equation has a singular double nonlinear structure in the sense that the equation contains a nonlinear integral operator whose integral kernel itself is expressed by another nonlinear integral operator with a singularity. It is difficult to prove the existence of solutions to the wage equation. In this study we prove the existence of solutions to the wage equation under the most general assumption.

研究分野：応用数学

キーワード：経済地理学 核周辺モデル 賃金方程式

1. 研究開始当初の背景

2008年度ノーベル経済学賞が Krugman の空間経済学への貢献に対し授与された。この研究の中核モデルが Dixit-Stiglitz-Krugman mode (DSK model) である。このモデルは資本集積と労働力移動による経済の自己組織化現象を表す空間経済学的進化ゲームであり、高い実証性を持ち、生産資本が枯渇する地方から都市への人口流出のシミュレーションへの応用が期待されている。しかしモデルの漸近挙動は長らく未解明のままであった。特に重要な予想命題『ある点の近傍で賃金密度と移動コストが十分に低いならば、その点の近傍で有限時間内に人口はゼロになり、その近傍から離れた有限個の点で人口密度が指数関数的に増大する(大都市への人口集中)』は証明されていなかった。また数値計算手法も未開発の状態であった。

空間経済学 (spatial economics) では多くの新しい関数方程式が次々に導出され関数方程式論の新しいフロンティアとなっている。この研究の中で Krugman は賃金方程式と呼ばれる二重非線形積分方程式と非線形偏微分積分方程式である進化ゲームの replicator 方程式を連立させ、資本集積と労働力移動の自己組織化を表す DSK model と呼ばれる空間経済学的進化ゲームを構築した。ノーベル経済学賞研究は、金融工学、不動点定理、ゲーム理論等の数多くの応用数学の源である。DSK model も強い関心を集めているが、空間経済学の数学的基礎は未解明であった。

さらに DSK model は高い実証性を持つため、その研究は社会的にも重要である。わが国では、全国 1,800 市区町村の約半数が「消滅可能性都市」に位置付けられ(2014年日本創生会議報告)地方都市では急激な産業資本の枯渇により実質賃金が低下し、労働人口が大都市へ流出し、その結果さらなる賃金水準の低下を招く負のスパイラスが発生してい

る。

2. 研究の目的

このように、経済学的にも数学的にも、経済の自己崩壊の解析に、DSK model は大きな役割を果たすと予想されていた。劇的な人口収縮局面に入った日本の国土軸の再設計に寄与するために、正確なシミュレーションの基礎となるモデルの漸近挙動研究は緊急の課題である。このような現状に鑑みて、今後 10 年間の地方都市からの人口流出と大都市への人口集中を定量的に予測することを最終目標に選び、DSK model を中心に研究を開始した。

DSK model は以下の数学的困難さ(A)と(B)を持つ全く新しいタイプの非線形偏微分積分方程式系(賃金方程式と replicator 方程式の連立系)で表現されるため、その数学的構造は長らく未解明であった。

(A) 賃金方程式の未知関数は賃金密度であり、人口密度を既知関数として含む非線形積分方程式であるが、その積分核それぞれ自身が賃金密度と人口密度の非線形積分作用素で表される。このため賃金方程式は二重非線形積分方程式(double nonlinear integral equation)と呼ばれる。この二重非線形性のため既知関数である人口密度に、未知関数である賃金密度を対応させる解作用素は人口密度の微小変化に鋭敏に反応する。

(B) 数理生物学の通常の replicator 方程式は、係数に未知関数である人口密度を陽に含む、非線形偏微分積分方程式である。しかし DSK model の replicator 方程式は、係数が(A)で述べた賃金密度を含むため、(A)の解作用素を介して未知関数を陰に含むことになり、賃金方程式の二重非線形との相乗効果により、DSK model の replicator 方程式の解は初期条件の変化に対して極めて鋭敏に反応する。このため、シミュレーションは非常に困難であ

った。

MathSci で『Krugman』を Title 検索しても、時間定常 DSK model の我々の研究以外には、Economic Theory に掲載された国際貿易論の Krugman-Helpman model の論文が数本ヒットするだけであり、予想命題で扱う時間非定常 DSK model の数学的基礎は全く未解明であった。この数学的基礎を確立することが、本研究の目的であった。

3. 研究方法

DSK model の(A)や(B)のような困難さを克服するために採用した方法を説明する。困難さの原因は『空間経済現象のデータはすべて統計的に観測される』という空間経済学の本質的制限がモデルに課せられているからである。関数方程式論と数理統計学の連携が今まで不十分であったため、この制限に即した解析手法が開発されなかった。この制限は空間経済学に関数方程式が持つ大きな困難さであると同時に、『空間経済学に関数方程式には数理統計学的手法が有力な武器になる』という重要な示唆を与える。そこで非定常 DSK model を攻略するため、代表者（関数方程式論）と分担者（数理統計学）が協力し、関数方程式論と数理統計学の融合手法を使って予想命題を攻略した。実際、数理統計学では人口密度を数理統計学的不変量を用いて評価する手法が開発され、空間経済学と同様の制限を持つ数理伝染病学に应用されている。そして数理統計学的不変量は二重非線形積分作用素やその解作用素に対して高い親和性を持ち、人口密度そのものより評価し易い。このことに注目して、我々は賃金方程式の解である賃金密度の直接評価を断念し、賃金密度の数理統計学的不変量の評価し、数理統計学的手法を用いてこの不変量と賃金密度を比較し、定常 DSK model の解析をすることができた。この2つの研究成果から、関数方程式論と数理統計学の融合手法は非常に有効であった。即ち以下のプロセス ~ を実行

した。

（不変量方程式導出）非定常 DSK model の方程式系の両辺に price index をかけ、空間変数について積分して平準化した。これに定常 DSK model の手法を適用し、数理統計学的不変量を解とする方程式を求めた。導出された方程式は master 方程式（Chapman-Kolmogorov 方程式）に類似した方程式になった。

（不変量評価）で求めた master 方程式の解に本研究で開発した手法を適用して、不変量の評価した。master 方程式は賃金方程式のような二重非線形性を持たない偏微分積分方程式であるため、非定常 DSK model の方程式系そのものより、数段取り扱い易く、その解である不変量は人口密度・賃金密度より容易に評価できた。

（比較定理）人口密度・賃金密度とで評価した数理統計学的不変量との関係を明らかにするため、数理統計学的手法を用いて比較定理を証明した。

本研究課題は関数方程式論と数理統計学の融合的手法を用いるので、代表者（関数方程式論）と分担者（数理統計学）のチームワークが重要であった。代表者は数値計算アルゴリズムの実装と計算結果の解析を行い、数値実験は代表者と分担者が移動コストの値毎に分担して行った。

4. 研究成果

平成27年度の研究内容：数値実験によりモデルの挙動を把握し、予想命題の証明のヒントを集めるため、以下の数値実験を行った。

- (1) replicator 方程式単独の数値実験と賃金方程式単独の数値実験。
- (2) replicator 方程式と賃金方程式を連立させた非定常 DSK model の数値実験。

平成28年度の研究内容：数理統計学的不変量を用いて人口密度・賃金密度との比較定理

を証明するため、以下の計算と証明を行った。

(3) 数理統計学的不変量が満足する master 方程式を導出して不変量を評価した。

(4) 不変量と人口密度・賃金密度の関係を明らかにする比較定理を証明した。

平成 29 年度の研究成果：予想命題を証明し数値シミュレーションを行った。

(5) 予想命題の証明と論文執筆。

(6) シミュレーションにより今後 10 年間の地方都市から大都市への人口流出を計算した。

平成 27 年度の研究成果（論文 ~ ）

代表者は DSK model の数値解析を手がけ、モデルの経済学的側面と数学的側面を理解していた。この理解を基礎として条件を様々に変えて数値実験を行うことにより、モデル挙動を把握し予想命題の証明のヒントをつかんだ。まず replicator 方程式単独の数値実験を行った。DSK model の replicator 方程式の解は数理生物モデルの replicator 方程式の解と相似であると当初予想していたが、相似性は時間局所的にしか成立せず、2 種類の replicator 方程式の解の時間大域的挙動は大きく異なることを発見した。次に賃金方程式単独の数値実験を行った。この数値実験では本研究で開発したアルゴリズムを用いた。この 2 つの数値実験を基礎として replicator 方程式と賃金方程式を連立させた非定常 DSK model の数値実験を行った。予想命題を裏付ける人口の流出・集中が観察できた。同時に初期賃金密度が領域全体で高く予想命題の仮定を満たさない場合に限って、定常解に収束する解や振動する解が現れることを証明した。証明の技術的理由から、移動コストの上限に制限をつけることになった。この条件の緩和は今後の課題であろう。

平成 28 年度の研究成果（論文 ~ ）。

賃金方程式の二重非線形性(A)のため、replicator 方程式の係数に含まれる賃金方程式の解作用素は、人口密度の微小変化に鋭敏

に反応する。そのためモデル方程式系の解は初期条件に対して非常に不安定であり、人口密度を直接評価するのは困難であった。さらに二重非線形性(A)のため賃金方程式を解析して賃金密度と人口密度の関係を評価するのも困難であった。これに対して、密度関数の直接評価を断念し、密度関数を平準化して得られる数理統計学的不変量を解とする方程式を導出し（不変量方程式導出）、その解を評価し（不変量評価）、数理統計学的手法を用いて不変量と元の密度関数の関係を明らかにし（比較定理）、不変量評価と比較定理を組み合わせて元の密度関数を評価し直す迂回的手法を使うことができた。

このプロセス で計算する数理統計学的不変量は、賃金方程式の二重非線形積分作用素とその解作用素を含む replicator 方程式に対して高い親和性を有する。そのためプロセス は、困難さ(A)の二重非線形性を持つ、賃金密度を鋭敏に変化させる効果を、和らげる働きをすることが分かった。さらに導出方程式の master 方程式（Chapman-Kolmogorov 方程式）は賃金方程式や replicator 方程式のものより、数段取り扱い易いことが知られている。これにより初期条件の微小変動に対する解作用素の過剰な不安定挙動が抑えられることができた。プロセス と は偏微分積分方程式が専門の代表者が行い、プロセス と は数理統計学的不変量の取り扱いに熟練した分担者が実行した。プロセス で得られる不変量の評価は、それ自身数理統計学的に意義のあるので、数理統計学の定理として分担者が別途考察予定である。

平成 29 年度の研究成果（論文 ~ ）。

前年度に証明した の比較定理と の不変量評価から、人口密度と賃金密度に対する評価を導出し、予想命題を証明した。通常の方法でシミュレーションを実行しようとする

と、天文学的な数の初期値と移動コストの値

の場合分けが必要である。そこで我々は予想命題を用いて挙動の分かっている場合を除外した。これにより本年度に行った数値計算の場合分けを大幅に減らすことができた。このシミュレーションにより、厚生労働省人口動態調査を基礎にして今後 10 年間の地方から大都市への流出人口を計算した。計算人口学 (Computational Demography) では、計算機科学の様々な新しい手法を人口学に応用することにより、急激な人口移動現象も表すことができる精密な人口モデルが構築されている。本研究のシミュレーションでもこの方法も援用することにより、実証データとの整合性を高めることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

M. Tabata and N. Eshima, Existence of a short-run equilibrium of the Dixit-Stiglitz-Krugman model, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 査読有り, Volume 2018 (2018), Article ID 2193070

M. Tabata and N. Eshima, Existence and uniqueness of solutions to the wage equation of Dixit-Stiglitz-Krugman model with no restriction on transport costs, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 査読有り, Volume 2017 (2017), Article ID 9341502, 7 pages, doi: 10.1155/2017/9341502

N. Eshima, Claudio Giovanni Borroni, and M. Tabata, Relative-importance assessment of explanatory variables in generalized linear models: an entropy-based approach, *Statistica & Applicazioni, Vita e Pensiero - Pubblicazioni dell'Universita Cattolica del Sacro Cuore*, 査読有り, Vol. XIV no. 2 (2016).

M. Tabata and N. Eshima, Convergence of global solutions to the Cauchy problem for the replicator equation in spatial economics, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 査読有り, Volume 2016 (2016), Article ID 4021516, 8 pages, doi: 10.1155/2016/4021516

N. Eshima, M. Tabata, Claudio Giovanni Borroni, Yutaka Kano, An entropy-based approach to path analysis of structural

generalized linear models: a basic idea, *Entropy*, 査読有り, 07/2015; 17(7):5117-5132. doi:10.3390/e17075117

M. Tabata and N. Eshima, A population explosion in an evolutionary game in spatial economics: Blow up radial solutions to the initial value problem for the replicator equation whose growth rate is determined by the continuous Dixit-Stiglitz-Krugman model in an urban setting, *Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications*, 査読有り, Vol 23 C, pp. 26-46, June, 2015

M. Tabata, N. Eshima, and Y. Sakai, Existence and computation of solutions to the initial value problem for the replicator equation of evolutionary game defined by the Dixit-Stiglitz-Krugman model in an urban setting: Concentration of workers motivated by disparity in real wages, *Applied Mathematics and Computation*, 査読有り, Vol. 245C, (2015), pp. 419-451.

M. Tabata, N. Eshima, Y. Kiyonari, and I. Takagi, The existence and uniqueness of short-run equilibrium of the Dixit-Stiglitz-Krugman model in an urban-rural setting, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 査読有り, Vol. 80, issue 2, pp. 474-493, 2015.

M. Tabata and N. Eshima, The existence and uniqueness of global solutions to the initial value problem for the system of nonlinear integro-partial differential equations in spatial economics: The dynamic continuous Dixit-Stiglitz-Krugman model in an urban-rural setting, *Abstract and Applied Analysis*, 2015, the special issue "Advances on Integrodifferential Equations and Transforms" 査読有り, Vol. 2015, Article ID 760136, 12 pages, 2015. doi:10.1155/2015/760136

[学会発表](計0件)

[図書](計0件)

[産業財産権]

○出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況(計0件)

名称：

発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

田畑 稔 (TABATA, Minoru)
大阪府立大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：70207215

(2)研究分担者

江島 伸興 (ESHIMA, Nobuoki)
京都大学・高大接続・入試センター・特定
教授
研究者番号：20203630

(3)連携研究者

()

研究者番号：

(4)研究協力者

()