

令和元年6月5日現在

機関番号：34316

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K05011

研究課題名(和文)力学系の方法による葉序螺旋タイリングの分岐の研究とその周辺

研究課題名(英文) Dynamical approach to the bifurcation of tilings on phyllotactic spiral lattices and related problems

研究代表者

山岸 義和 (Yamagishi, Yoshikazu)

龍谷大学・理工学部・准教授

研究者番号：40247820

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：葉序螺旋の幾何学的モデルはいくつか提案されているが、そのうちアルキメデス螺旋格子上のポロノイタイリング、ならびに対数螺旋格子上のポロノイタイリングおよび円充填について、とくに斜列と呼ばれる螺旋の本数に着目して、パラメータを動かしたときの斜列の変化を調べた。アルキメデス螺旋格子については、パラメータ空間を連続化する方法により、斜列の単調性、結晶粒界の準周期性、長方形タイルの縦横比の収束などの性質を簡明かつ厳密に証明することができた。対数螺旋格子については、斉次有界な距離関数を用いることによって線形格子とよく似た扱いが可能となり、ポロノイタイリングと円充填の分岐図が互いに双対であることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

葉序螺旋とは、ひまわりの種の並び方を幾何学的にモデル化したものである。螺旋が作る縞模様を扱う際には、通常、歪みを無視して、直線状の縞模様で近似して考えることが多い。本研究では、螺旋による歪みを考慮して縞模様を扱うことを考えた。

対数螺旋の場合には、きわめて特殊な斉次有界な距離関数が有効に機能することがわかった。この距離関数は、葉序と全く関係のない誤差解析の分野で既に発見されたものと同じである。アルキメデス螺旋の場合には、結晶粒の境界の存在と、その準周期的構造が証明された。ここではフィボナッチ数および黄金比が重要な役割を果たしている。

研究成果の概要(英文)：Our main subjects are the geometric models of phyllotactic spirals, including Voronoi tiling on the Archimedean and logarithmic spiral lattices, and circle packing on logarithmic spiral lattices. We studied parameter dependence of the number of spirals, called parastichies.

For Archimedean spiral lattices, we obtained a simple and rigorous proof for the monotonicity of parastichies, quasiperiodicity of the grain boundaries, and the shape limit of the quadrilateral tiles, by using the continuation of the parameter space.

The logarithmic spiral lattices have a good property like the linear lattices, under a bounded planar metric. We showed in particular that the bifurcation diagrams of Voronoi tiling and circle packing are dual.

研究分野：応用幾何学

キーワード：葉序 螺旋格子 ポロノイタイリング 円充填 連分数

1. 研究開始当初の背景

葉序螺旋のタイリングは、螺旋格子と呼ばれる点集合から定まる平面分割であり、離散系と連続系の中間的な性質をもつ。力学系(分岐理論)、応用数学(ポロノイ分割)、折り紙工学(螺旋折り紙)、トポロジー(被覆空間)との関連をもち、とくに黄金比を通じて物理学(準結晶)、生物学(葉序)、数論(連分数)と関連をもつ。本研究では、各分野の問題を必要となる問題を押さえつつ、とくに力学系の手法を軸として、葉序螺旋のタイリングにおける準周期的性質、数論的性質、幾何学的性質などの相互の関連を明らかにする。

2. 研究の目的

- (1) 本研究の第一の目的は、放物螺旋のポロノイタイリングの分岐構造(パラメータによる変化の仕組み)を明らかにすることである。研究代表者はすでに、相似変換の対称性をもつ三角形タイリングならびにポロノイタイリングを調べ、その分岐を表すパラメータ空間を解明しているが、これらは螺旋の本数がタイルによらず一定の、いわば局所モデルであった。放物螺旋は、より現実に近い葉序螺旋といえる。本研究では、局所モデルをつなぎ合わせた大域的構造として放物螺旋を記述することを目的とする。
- (2) 対数螺旋上の円充填モデルは20世紀初頭にオランダの植物学者 Van Iterson (1907) によって提案された螺旋葉序の幾何学的モデルである。図1は、円筒上の格子に対するポロノイタイリングの分岐図と円充填の分岐図を重ねたもので、両者が一次分数変換の対称性をもち、グラフとして互いに双対であることを表している。螺旋タイリングにおいても、ポロノイタイリングの分岐図と双対な円充填の分岐図が解析関数として構成できるかが問題となる。

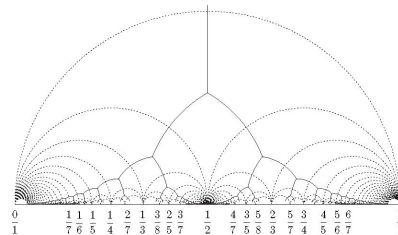


図1

3. 研究の方法

- (1) 放物螺旋格子およびアルキメデス螺旋格子上のタイリングについて、その大域的構造を、パラメータつきタイリングにおける分岐図を利用して記述することを考える。すなわち、一つのタイリングの各タイルは、パラメータつきのあるタイリングの族においてパラメータが整数の場合の基準タイルと、近傍を込めて相似であるという性質がある。したがって、基準タイルの近傍に注目してタイリングの分岐(パラメータによる変化)を調べることは、一つの平面タイリングの大域構造を調べることに等価である。このように、一つの分岐図を用いて放物螺旋格子の大域構造を記述する。

また、放物螺旋格子上のタイリングを組合せ構造によって分割したときの境界円上に準周期的構造があることが知られているが、これについて、分岐図による簡明な説明を与える。

- (2) 対数螺旋格子上の円充填モデルは葉序螺旋における古典であるが、相似タイリングへの適用については数学的に十分に整備された提案は見当たらない。複素解析的に精密なモデルの構築を試みる。

4. 研究成果

- (1) 放物螺旋格子よりも扱いやすいアルキメデス螺旋格子上のポロノイタイリングにおいて、トポロジーの手法を応用して、タイリングのパラメータ空間を連続化することにより、分岐図でタイリングを記述できることがわかった。また、平面上の円板が極座標に移しても凸であることを利用して、螺旋(斜列)の本数の単調性を示した。

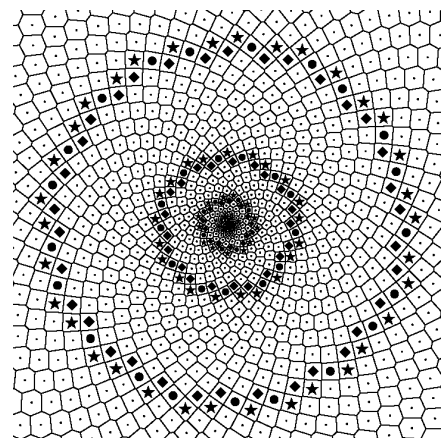


図2

アルキメデス螺旋格子上のポロノイタイリング(図2)は、六角形(蜂の巣型)タイリングである結晶粒と呼ばれる領域と、それらの境界である結晶粒界と呼ばれる部分に分かれる。結晶粒界上のタイルの形状は長方形に近い。結晶粒上のタイルは3つの斜列係数をもち、結晶粒界上において斜列係数が変化する。結晶粒界の組合せ的性質および結晶粒界上のタイルの極限として得られる長方形の

縦横比は、発散角の連分数展開によって定まる。これらの結果を、連続なパラメータ空間を考へることによって証明した。

- (2) 対数螺旋上の円充填モデルにおける円板の半径が、平面の距離関数の公理を満たすことを示した。さらに、この距離関数によって、対数螺旋上のポロノイタイリングの分岐曲線が記述できることがわかった。対数螺旋上のポロノイタイリングと円板充填の分岐図が、互いに双対グラフであることを示した。(図3)

線形格子では、円板充填とポロノイタイリングは一種の双対関係にあることは既に知られていた。対数螺旋格子では、円板充填とポロノイタイリングの双対性は、線形格子の理論の非線形版にあたる。証明も連分数の性質を利用しており、自明でない。

線形格子においては、平行四辺形が円に内接するとき、平行四辺形は長方形であって、二つの対角線の長さは等しい。対数螺旋格子においては、平行四辺形に相当する四角形が円に内接するときは、二つの対角線の長さが、この斉次有界な距離関数で測ったときに等しい。このような性質をもつ有界距離関数が、対数螺旋格子の幾何において重要な役割を果たしている。対数螺旋格子は、通常の場合、ポロノイタイリングの斜列係数を三つもち、円板充填の斜列係数はポロノイタイリングの斜列係数のいずれかに等しいことを示した。これら斜列係数は、回転角の近似分数の分母として現れる自然数である。対数螺旋格子の円板充填およびポロノイタイリングの分岐図は Farey 木の構造をもつ。

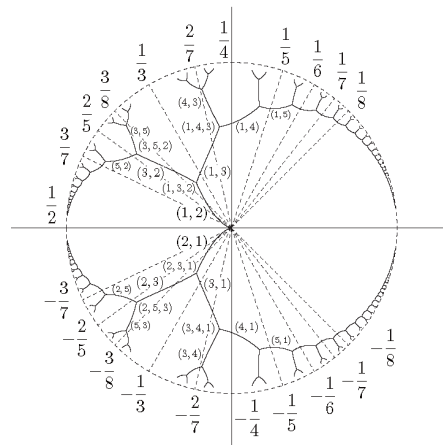


図3

- (3) タイル張りとは被覆空間の応用として、正四面体の展開図について考察した。正四面体の展開図は平面上の正三角形タイル張りを与え、平面上の直線は測地線を与える。これを利用して一本の紙の輪を折り畳んで正四面体が得られることを示した。測地線の方法は可算無限個存在する。また、正四面体の展開図として得られる凸多角形の族が、切り込み線のグラフに着目して分類できることを示した。
- (4) また、球面のタイル張りの応用的問題としてビーズ多面体を調べた。ビーズ多面体において測地線が定義される。ビーズ正二十面体上の測地線は正二十面体上の閉測地線に対応し、逆に正二十面体上の閉測地線に対応してビーズ正二十面体が存在することがわかった。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 8 件)

Yoshikazu Yamagishi and Takamichi Sushida, Archimedean Voronoi spiral tilings, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol.51, no.4, 2018, 045203. (30pages). 査読付.

doi: 10.1088/1751-8121/aa9ada

塩田朝未、山岸義和、ルービックキューブの FULRD 問題、数式処理、第 24 巻第 2 号、2018、pp.91-97. 査読付.

<http://www.jssac.org/Editor/Suushiki/index.html>

村上佑希、山本良太、西村憲明、上園拓郎、山岸義和、一本の紙の輪から正四面体を折る、日本応用数学会論文誌、vol.28, no.1、2018、pp.39-53. 査読付.

doi:10.11540/jsiamt.28.1_39

Takamichi Sushida and Yoshikazu Yamagishi, Geometrical study of phyllotactic patterns by Bernoulli spiral lattices, Development, Growth and Differentiation, vol.59, 2017, pp.379-387. 査読付.

doi:10.1111/dgd.12378

大西俊弘、四ツ谷晶二、山岸義和、三角形の内心と傍心の軌跡について --軌跡の方程式の導出法と軌跡の存在領域--、RIMS 講究録、vol.2022 RIMS 共同研究(公開型)「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」、2017、pp.170-176. 査読なし.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/2017.html>

Yoshikazu Yamagishi and Takamichi Sushida, Spiral disk packings, Physica D, vol.345, 2017, pp.1-10. 査読付.

doi:10.1016/j.physd.2016.12.003

Yoshikazu Yamagishi, Takamichi Sushida and Akio Hizume, Shape limit in Voronoi

tilings for Bernoulli spirals, *Material Structure in Chemistry, Biology, Physics and Technology*, vol.22, no.5, 2015, p.296. 査読なし.
<http://www.xray.cz/ms/http://www.xray.cz/ms/>
Yoshikazu Yamagishi, Takamichi Sushida and Akio Hizume, Voronoi Spiral Tilings, *Nonlinearity*, vol.28, 2015, pp.1077-1102. 査読付.
doi:10.1088/0951-7715/28/4/1077

〔学会発表〕(計 41 件)

1. 須志田隆道、山岸義和、一般アルキメデス螺旋格子によるポロノイタイリング、日本数学会、東京工業大学、2019年3月。
2. 山岸義和、野田頭美羽、中島香歩、ビーズ正二十面体上の閉測地線、日本応用数理学会第15回研究部会連合発表会、筑波大学、2019年3月。
3. Miu Nodagashira, and Yoshikazu Yamagishi, Closed geodesics on the beading regular icosahedra, The 10th Japan-Taiwan Joint Workshop for Young Scholars in Applied Mathematics, Ryukoku University, 2019年2月。
4. 山岸義和、野田頭美羽、中島香歩、ビーズ正二十面体上の測地線、かたちシューレ 2018 in 琵琶湖、形の科学会、2018年12月。
5. 須志田隆道、山岸義和、一般アルキメデス螺旋格子による葉序的なポロノイタイリング、応用数学合同研究集会、龍谷大学、2018年12月。
6. 須志田隆道、山岸義和、一般アルキメデス螺旋による葉序的なポロノイタイリング、RIMS 共同研究(グループ型)「タイル張りと準周期性の周辺」、京都大学、2018年10月。
7. 山岸義和、須志田隆道、アルキメデス螺旋格子上のポロノイタイリング、日本数学会、岡山大、2018年9月。
8. 山岸義和、西崎惇也、佐治拓道、等面四面体の source unfolding、日本応用数理学会、名古屋大学、2018年9月。
9. 須志田隆道、山岸義和、一般アルキメデス螺旋格子による葉序的なポロノイタイリング、日本応用数理学会、名古屋大学、2018年9月。
10. 牧田渉、岸田健太、須志田隆道、山岸義和、粘着円充填、日本応用数理学会、名古屋大学、2018年9月。
11. 山岸義和、等面四面体の source unfolding、MIMS 文科省現象数理学拠点共同研究集会「折紙数学と折紙工学を基盤とする産業応用」、明治大学、2018年8月。
12. 西村憲明、上園拓郎、山岸義和、正四面体から凸多角形への展開について、日本応用数理学会第14回研究部会連合発表会、大阪大学、2018年3月。
13. 物部侑吾、山岸義和、正四面体の cut locus、日本応用数理学会第14回研究部会連合発表会、大阪大学、2018年3月。
14. Koshino Masami, and Yoshikazu Yamagishi, Thislethwaite's method to the FULRD problem of Rubik's cube, The 9th Taiwan-Japan Joint Workshop for Young Scholars in Applied Mathematics, National Cheng Kung University, Taiwan, 2018年3月。
15. 山岸義和、アルキメデス螺旋格子上のポロノイタイリング、龍谷大学武蔵野大学連携シンポジウム、龍谷大学、2018年2月。
16. 越野真実、山岸信博、樋口三郎、山岸義和、ルービックキューブの FULRD 問題における Thistlethwaite の方法、応用数学合同研究集会、龍谷大学、2017年12月。
17. 上園拓郎、須志田隆道、山岸義和、回転対称性を加えた対数螺旋格子上の円充填、応用数学合同研究集会、龍谷大学、2017年12月。
18. 上園拓郎、須志田隆道、山岸義和、回転対称性を加えた対数螺旋格子上の円充填とポロノイタイリング、RIMS 共同研究(グループ型)「タイリングと準周期系の数理」、京都大学、2017年10月。
19. 越野真実、山岸信博、樋口三郎、山岸義和、ルービックキューブの FULRD 問題における Thistlethwaite の方法、日本応用数理学会、武蔵野大学、2017年9月。
20. 上園拓郎、須志田隆道、山岸義和、回転対称性を加えた対数螺旋格子上の円充填、日本応用数理学会、武蔵野大学、2017年9月。
21. 山岸義和、須志田隆道、対数螺旋格子上の円板充填、日本数学会、首都大学東京、2017年3月。
22. Yoshikazu Yamagishi, Circle packings along logarithmic spiral lattices, The Taiwan-Japan Joint mini-workshop on Applied Mathematics, Higashi Hiroshima Arts and Culture Hall Kurara, 2017年3月。
23. Takuro Uezono, and Yoshikazu Yamagishi, Spiral circle packing in the cone, The 8th Taiwan-Japan Joint Workshop for young scholars in applied mathematics, Higashi Hiroshima Arts and Culture Hall Kurara, 2017年3月。
24. Kenta Kishida, and Yoshikazu Yamagishi, Sticky circle packing, The 8th Taiwan-Japan Joint Workshop for young scholars in applied mathematics, Higashi Hiroshima Arts and Culture Hall Kurara, 2017年3月。
25. Asami Shiota, and Yoshikazu Yamagishi, The FULRD problem of Rubik's cube, The 8th

- Taiwan-Japan Joint Workshop for young scholars in applied mathematics, Higashi Hiroshima Arts and Culture Hall Kurara, 2017年3月.
26. 山岸義和、対数螺旋格子上の円板充填、「リーマン面・不連続群論」研究集会、東北大学、2017年1月.
 27. 山岸義和、須志田隆道、対数螺旋格子の円板充填、応用数学合同研究集会、龍谷大学、2016年12月.
 28. 塩田朝末、山岸義和、ルービックキューブのFULRD問題、応用数学合同研究集会、龍谷大学、2016年12月.
 29. Yoshikazu Yamagishi, Bifurcation diagram of disk packings on logarithmic spiral, International Conference on Mathematical Modeling and Applications, Origami-Based Modeling and Analysis, 明治大学, 2016年11月.
 30. Yuki Murakami, Ryota Yamamoto, and Yoshikazu Yamagishi, Origami loop strip for the regular tetrahedron, International Conference on Mathematical Modeling and Applications, Origami-Based Modeling and Analysis, 明治大学, 2016年11月.
 31. 山岸義和、須志田隆道、対数螺旋格子上の円板充填、RIMS共同研究「準周期系の数理論とその周辺」、京都大学、2016年11月.
 32. 大西俊弘、山岸義和、四ツ谷晶二、三角形の内心と傍心の軌跡について --軌跡の方程式の導出法と軌跡の存在領域--、RIMS研究集会「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」、京都大学、2016年9月.
 33. 山岸義和、須志田隆道、対数螺旋格子上の円板充填、日本応用数学会、北九州国際会議場、2016年9月.
 34. 須志田隆道、山岸義和、アルキメデス螺旋格子による葉序的ポロノイタイリング、応用数学合同研究集会、龍谷大学、2015年12月.
 35. Takamichi Sushida, Akio Hizume, and Yoshikazu Yamagishi, Phyllotactic Voronoi tilings on Archimedean spiral lattices, International Conference on Mathematical Modeling and Applications 2015, Self-Organization Modeling and Analysis, 明治大学, 2015年10月.
 36. 須志田隆道、日詰明男、山岸義和、アルキメデス螺旋格子による葉序的ポロノイタイリング、RIMS 短期共同研究集会「強非周期タイル集合とその周辺」、京都大学、2015年10月.
 37. 須志田隆道、日詰明男、山岸義和、アルキメデス螺旋格子点列による葉序的なポロノイタイリング、日本応用数学会、金沢大学、2015年9月.
 38. 大西俊弘、山岸義和、四ツ谷晶二、頂点から内心への変換式・逆変換式の簡明な導出法、RIMS研究集会「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」、京都大学、2015年8月.
 39. Yoshikazu Yamagishi, Takamichi Sushida, and Akio Hizume, Shape limit in Voronoi tilings for Bernoulli spirals, Aperiodic 2015, Brevnov Monastery, Prague, 2015年8月.

〔図書〕(計 1 件)

Takamichi Sushida, Akio Hizume, and Yoshikazu Yamagishi, Design methods of origami tessellations for triangular spiral multiple tilings, in: Origami6, I, edited by Koryo Miura et al., American Mathematical Society, 2015, 241-250.
<https://bookstore.ams.org/mbk-95/>

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

- Researchmap <https://researchmap.jp/read0032542/>
- ORCID iD <https://orcid.org/0000-0001-5987-5256>
- 龍谷エクステンションセンター産官学連携通信、vol.11、2018年1月、研究シーズ紹介、pp.9-10.
<https://rec.seta.ryukoku.ac.jp/iag/pamphlet/report/report11/index.html>

6. 研究組織

- (1) 研究分担者
なし

(2)研究協力者

研究協力者氏名：須志田 隆道

ローマ字氏名：(SUSHIDA, Takamichi)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。