1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月　７ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０５０６０

研究課題名（和文）離散的手法と数値計算に基づく超対称ゲージ理論の非摂動的探求

研究課題名（英文）Non-perturbative study of supersymmetric gauge theories via discretization and numerical computation

研究代表者
松浦　壮（MATSUURA, So）

慶應義塾大学・商学部（日吉）・教授

研究者番号：７０３９２１２３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：最近の超弦理論の研究から、超対称ゲージ理論が初期宇宙や量子重力理論といった問題にアプローチするための鍵となることが明らかになりつつある。本研究は、この成果を受け、2次元格子理論と行列正則化を組み合わせることで、4 次元の超対称ゲージ理論を第一原理から計算する手法を確立することを目的として行われた。
本研究では、分割したリーマン面上に2次元超対称ゲージ理論を定義し、その特性を調査した。結果、2次元理論の量子異常と数値計算の関係性をはじめとする多くの知見を得ることが出来た。これらの知見は、今後量子重力理論を見据えた4次元理論の数値計算を実行する上で必要不可欠なものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義
現在、物質の基本的な構成要素である「素粒子」は、その相互作用まで含めて場の量子論と呼ばれる理論体系で記述される。一方、アインシュタインは重力の本質が時空と物質の相互作用にある事を明らかにしたが、その記述方法は古典力学的であり、場の量子論とは本質的に相容れない。我々の宇宙の根本原理を明らかにするためには、重力と量子がどのような形で融合するかを知る必要があるが、超弦理論が予言する「ゲージ重力対応」はそのための有力なアプローチ方法である。本研究によって、超対称ゲージ理論の数値計算を実行するための知見が多く得られた。これは、重力の量子論的な特性を調査するための重要なステップである。

研究成果の概要（英文）：From recent research on string theory, supersymmetric gauge theory has been thought to be a key to approach the quantum gravity. In our project, we aimed to establish a method to calculate four-dimensional supersymmetric gauge theory from the first principle by combining two-dimensional lattice theory and matrix regularization.
In this project, we have defined the supersymmetric gauge theory on discretized Riemann surfaces and investigated their characteristics. As a result, we obtained many findings including the relationship between the quantum anomaly in two-dimensional theory and numerical calculation. This is an essential achievement when considering quantum gravity through numerical calculation in the future.

研究分野：素粒子論

キーワード：超対称性　数値計算　格子ゲージ理論

## １．研究開始当初の背景

超対称ゲージ理論は、現在の素粒子物理学の様々な場面で重要な役割を果たしている。まず超対称性は、時空が持っている並進対称性の自然な拡張になっており、単なる仮説ではなく、素粒子間の相互作用を本質的なレベルで支配していると考えられている。実際、超対称性を仮定すると、重力を除く３つの相互作用の結合定数が高エネルギー領域で自然に統一されることが分かっており、超対称性は次世代の素粒子現象論を構築する上で中心的なテーマの一つになっている。

一方で、超対称ゲージ理論は超弦理論と相性が良く、その立場からも精力的に研究が行われている。その中でも特に重要な成果は、いわゆる「ゲージ／重力対応」の発見である。典型的な例は、４次元 N＝４超対称ヤン・ミルズ理論と AdS 時空上の超重力理論の間に成り立つ対応で、これによって、例えばブラックホールの微視的な性質をゲージ理論の立場から調べるといった研究が可能になり、重力相互作用とゲージ相互作用の双方の理解を大きく前進させた(1)。

従来、超対称ゲージ理論を非摂動的に研究する際に主に用いられてきたのは、超対称性の代数によって要請される、理論に対する強い縛りである。超対称性の代数を用いると、ある種の物理量に関しては数学的に厳密な取り扱いをすることができる。この方法は、超対称性を持たないゲージ理論にはない強力な研究方法ではあるが、超対称性の代数に守られたごく一部の物理量にしか適用できないという欠点がある。理論のダイナミカルな振る舞いを、摂動論の限界を超えて調べるためには、量子色力学（QCD）に対して格子 QCD がそうであったように、理論そのものを有限自由度の統計系によって正則化する必要がある。もしそれが可能になれば、原理的にはあらゆる物理量を摂動論に頼らずに計算できるようになり、超対称ゲージ理論の理解は飛躍的に進展すると期待される。

研究開始当時、1 次元、2 次元といった低次元の超対称ゲージ理論に関しては、複数の研究グループによって独立に格子上の理論が提案された(2)。これらの理論は、私自身を含む研究グループによって整理され、最終的に岡山光量子科学研究所の杉野氏による理論 (杉野理論)(3)とワシントン大学の Kaplan 氏のグループによる理論 (CKKU 理論)(4)の 2 種類の格子理論にまとめられることが判明した(5)。

それとは別に、2 次元非可換球面上のゲージ理論を行列理論を用いて正則化する方法が提案されており、この方法は原理的に超対称ゲージ理論に対しても適用できる。そして、我々のグループは、2 次元の格子理論と行列理論による正則化を組み合わせることで、有限の大きさのゲージ群を持つ 4 次元 N=2,4 超対称非可換ヤン・ミルズ理論を非摂動論的に正則化できることが示された(5)。

## ２．研究の目的

この状況を受けて、我々は、改良された杉野理論を用い 2 次元超対称格子理論を数値計算が実行出来る形に整備し、実際に 2 次元理論の数値計算を実行すること、そして、行列正則化を組み合わせた方法を適用して 4 次元理論の数値計算を実行することを目的として本件研究を開始した。

本研究の一番の特徴は、非可換性を持つ 4 次元超対称ゲージ理論の解析に数値計算を用いることにある。一般に非可換場の理論は、紫外赤外混合と呼ばれる現象のために、非可換パラメータをゼロにする極限(可換極限)が可換理論と一致しないことが指摘されており、4 次元 N=2 超対称ヤン・ミルズ理論の場合にはこの現象が起こると予想される。一方、N=4 理論は特殊で、非可換理論の可換極限が可換理論に一致することが摂動計算から予想されている。この予想を非摂動 論的に検証すると同時に、その結果として、通常の(可換な)4 次元 N=4 超対称ヤン・ミルズ理論 の数値計算を実行する環境を整えることが本研究の目標である。

この方法を採用することにより、原理的にはあらゆる物理量を第一原理から計算できるようになる。これによって、超対称ゲージ理論の理解が飛躍的に向上するだけでなく、これまで間接的にしか調べることのできなかったとゲージ/重力対応を直接検証することができ、重力理論やブラックホールの研究に対して新しい方法論を提供できる。これは、素粒子物理学の分野にとどまらず、宇宙物理の分野にとっても極めて重要度の高い研究である。さらに、本研究で私が用いる正則化の方法は、他の理論にも適用できる汎用性の高い方法であることも重要な特徴である。本研究が進展することによって、他の重要な超対称ゲージ理論に対しても数値計算を行い、そのダイナミカルな性質を非摂動論的に調べることができるようになる。

## ３．研究の方法

数値計算を実行する上で大切なのは、最終的に正しい結果を返すことだけではない。プログラムの作りやすさ、及び、数値計算を制御する変数の少なさも非常に重要なポイントである。既に述べたように、我々は 2 次元格子理論と非可換球面への行列正則化を組み合わせ、4 次元 N=2,4 超対称ヤン・ミルズ理論を非摂動論的に正則化した。この中では、2 次元格子理論として杉野理論を採用したが、原理的には格子理論として杉野理論の代わりに CKKU 理論を用いることもできる。そこで我々は、平成 23 年度から平成 26 年度までに若手研究(B)で採用された研究課題「数値計算で探る超対称ゲージ理論の非摂動構造」（課題番号 23740197）の中で、プログラム作成が容易な CKKU 理論を詳細に調べた。その過程で明らかになったのは、「CKKU 理論は数値計算を制御する変数の数が多く、目標である連続理論の結果を得るために非常に煩雑な作業を

行う必要がある」という事である。実際、CKKU 理論はリンク変数が複素行列であり、格子間隔を定義するためにその対角要素を用いる。そのため、ゲージ群が必然的に U(N)となり、連続極限において U(1)モードが分離しているかどうかは別途確かめる必要がある。また、U(1)モードに伴ってフェルミオンにもゼロモードと準ゼロモードが生じ、ディラック行列を正しく評価するためには、これらを適切に処理する必要がある。このように、CKKU 理論で数値計算を行うためには非常に多くの変数調整が必要になる。

一方、杉野理論ではリンク変数がユニタリー行列で、ゲージ群を SU(N)に選ぶことが出来る。そのため、上記のような U(1)モードに付随する問題は生じず、数値計算を制御する変数の数が格段に少なくなる。その一方で、素朴に構成した杉野理論には、物理的でない多数の真空が存在する。これを回避するために、リンク変数に「許容条件」と呼ばれる制限を設ける処方箋が提案されており、この問題は実質的に回避可能である。これによって杉野理論の数値計算を行うための障害が取り除かれ、2 次元超対称ゲージ理論の数値計算を行うために最適な格子理論は、実質、杉野理論に一本化されたと言える。

そこで私は、平成 27 年度、この改良された杉野理論の数値計算を行い、この理論が 2 次元格子理論として正しく機能することを確かめる。改良前の杉野理論の数値計算を用いて N=(2,2)理論の数値計算を実行した先行研究がある。我々はまず、この論文の結果と結果を比較することで、改良された理論の有効性を確かめる。それに続いて、4 次元理論への格上げが可能な、2 次元 N=(4,4),(8,8)理論の数値計算を実行する。

平成 28 年度以降は、4 次元理論の数値計算に向けての準備を行い、実際に 4 次元理論の数値計算を実行する。使用する理論は、前年度に整備した 2 次元 N=(4,4),(8,8)理論に特定の変形を施した理論である。この変形された理論は非可換球面を解に持ち、その解まわりのゆらぎは 4 次元非可換超対称ゲージ理論と同一視できる。我々は、次のステップを踏みながら 4 次元理論の調査を進める。

- 必要な非可換球面を数値計算の中で安定化させるための方法を確立する。
- 4 次元理論の厳密に計算できる物理量（カイラル演算子の異常次元等）を数値計算で再現する。
- 非可換パラメータをゼロにする極限を、通常の可換ゲージ理論の結果と比較する。
- 厳密に計算できない物理量、または、結果の分かっていない物理量を数値計算によって評価する。

ステップ 1 には、我々とは違う配位ではあるが、非可換球面を用いてラージ N 極限での AdS/CFT の検証を数値的に行った先行研究が参考になる。ここでは、実際に非可換球面を安定させて数値計算を行っており、同じ手法が我々の状況にも応用出来ると考えられる。

ステップ 2 は絶対に必要である。プログラムは常にバグを含む可能性があるため、このようなチェックを綿密に行わない限り、他の計算を行ったとしてもその結果は全く信用できないからである。またこの計算は、数理物理的な手法とは別の方法ではじめて実行される、 有限な大きさのゲージ群を持つ超対称ゲージ理論の非摂動論的な解析という意味で、学術的にも意義深いものである。

ステップ 3 とステップ 4 が本研究の本題となる。先に述べたように、一般に非可換場の理論は、紫外赤外混合のために非可換パラメータがゼロのところに不連続性がある。ただし、N=4 の理論は特殊で、摂動計算によって非可換理論の可換極限が通常の（可換な）理論に一致することが予想されているが、この予想が非摂動論的に検証されたことはなく、本研究がその初めての試みになる。そして、可換極限が取れるということは、通常の N=4 理論を数値的に調べられることを意味している。これを用いて、グルーオン散乱振幅、一般の Wilson loop、各種相関関数などの物理量を数値計算によって評価する。これらの物理量は、ゲージ重力対応や可積分系を応用して精力的に研究が行われているが、我々の第一原理計算によって非自明な検証を行うことができる。特にゲージ/重力対応の検証は重要である。我々のやり方ではゲージ群の大きさを有限に出来るため、それに対応して重力の量子効果が評価出来る。これよって、量子重力を含む、強い意味でのゲージ/重力対応を検証できるのは極めて意義深いことである。

４．研究成果

平成 27 年度は改良された杉野理論の数値計算を行った。この数値計算の目的は、許容条件を課さずに真空の縮退を取り除く方法が正しく機能するかどうかを確かめること、そして、改良された杉野理論の数値計算が理論的な予言や部分的に行われていた先行研究の結果を正しく再現するかどうかを確かめることであるが、この二つの目的は完全に達成された。実際、モンテカルロ・シミュレーションで得られた場の配位は全て物理的な真空のまわりの揺らぎとして理解することが出来るものであった。また、超対称性の特性を使って厳密に計算可能な量や、トーラスのトポロジーを持つような時空に関して行われた先行研究の結果も誤差の範囲内で完全に再現された。これは、拡張された杉野模型が数値的にも正しく機能することを強く示唆している。そして、これは予想外だったのだが、数値計算によって理論的な側面に関しても新しい示唆を得ることが出来た。実際、フェルミオンを含んだ数値計算で標準的に行われている、ディラック行列の行列式の位相を無視する近似を素朴に行うと、超対称性に由来する予言が正しく再現しないことが確かめられた。これは、理論が持つ U(1)対称性から生じるアノマリーを正

しく取り入れていないために生じた現象で、事実、アノマリーの寄与を正しく取り入れることで超対称性に由来する予言が再現された。また、我々の模型の連続極限が、最大限の超対称性を残すように U(1)背景を導入した、曲がった時空上の場の理論であることも明らかになった。これは、この拡張された杉野理論が、当初考えていたような位相的場の理論というだけでなく、物理的な意味を持った場の理論を離散化したものである事を示している。

平成 28 年度は、改良された杉野模型について理論的・数値的な解析を進め、得られた成果を論文にまとめた。理論的な解析から新たに分かったことは、リーマン面上に定義された杉野模型は、連続理論と同様、リーマン面が持つトポロジーの性質を引きずってアノマリーを持つということである。これ自体は理論の特性であり、逆にこの性質が連続理論から正しく引き継がれているお陰で、格子理論でも局所化の手法を使うことが出来る事が示された。ただし、これは数値計算にとっては障害になり得る。杉野理論においては、アノマリーは U(1)電荷が異なるフェルミオンの数の不均衡として現れる。従って、この理論のディラック作用素のパフィアンは必然的に U(1)位相を持つことになり、その U(1)位相をちょうど相殺するような演算子のみが期待値を持つはずなのだが、従来の数値計算ではそのような位相を無視して統計平均を取るため、理論の構造を壊してしまうことになる。そこで我々は、アノマリーを持つような理論の数値計算に適用出来る新しい位相の取り扱い方法を考案した。この方法を用いると、理論計算から期待される物理量を数値計算によって正しく求めることが出来ることが確かめられた。また、モンテカルロ法で数値計算をする時に常に問題になる符号問題も、この方法によって回避されることがわかった。実際、ディラック作用素のパフィアンが持つ複素位相からアノマリー由来の複素位相を取り除いた結果、残りの位相はある値の周りにピークを持つことがわかった。これは、連続理論の考察から期待された通りの振る舞いである。

平成 29 年度は、改良された杉野模型について、理論的な成果を論文にまとめ、数値的な解析を進めた。理論的な成果とは、連続極限へ近づき方の改良である。格子理論というのは、本来連続の時空を格子状に分割して離散化した理論である。従って、目的である連続理論の性質を調べたい時は、分割の細かさに相当する「格子間隔」をゼロに近づけながら数値計算を行う、という戦略が採られる。そのため、理論が出来る限り速やかに連続理論に近付く方が効率よく解析を行うことができる。従来の杉野模型では、格子理論と連続理論の間には格子間隔に比例した差異がある。従って、連続理論に近づきはするが、その近づき方という意味では最低限の要求が満たされているのみで、効率の悪い分割になっている。そのため、目的の物理量を評価する時、十分に小さな格子間隔を取る必要があり、解析の効率を妨げてしまっている。そこで我々は、格子間隔の 2 乗の速さで連続理論に近付くよう、オリジナルの杉野模型を改良した。その際、理論に残っている超対称性を壊さないように改良した点がポイントである。同様の改良は行列理論に関しても行われ、計算効率を劇的に改善した実績があり、同じく低次元理論である 2 次元杉野模型に対しても同様に機能する事が期待される。数値的な解析に関しては、コードの改良を行い、数値解析を実行中である。連続理論に近づけるためには格子間隔をゼロに近づけなければならず、それに従って計算量も増加する。そのため、1 個の CPU で計算するよう設計された従来の計算コードを複数の CPU で並列計算するように改良する必要があった。現在、そのコードを利用して、球面上の杉野模型の連続極限に向けた数値計算を実行している。

平成 30 年度は、一般化された杉野模型について理論面の理解を深め、数値的な解析を進めた。現在解析を進めているリーマン面上の 2 次元超対称ゲージ理論は 2 個の超対称性と 2 種類の U(1)対称性を持っている。一般化された杉野理論はこの理論を離散化したものだが、離散化する際に超対称性を 1 個、U(1)対称性を 1 個保存するように工夫されている。そして、その連続極限ではリーマン面上の 2 次元超対称ゲージ理論が実現されていることが期待されるため、離散化した際に壊れていた残り 1 個の超対称性ともうひとつの U(1)対称性が回復するはずである。現在進めている解析は、数値計算によってこの対称性の回復を確認することを目的にしている。量子論的な対称性の回復は Ward-高橋(WT)恒等式と呼ばれる恒等式が成り立つかどうかで判定できる。今注目している理論では、壊れている U(1)対称性によって 2 個の超対称性が関連付いている。この事実に注目すると、壊れていた超対称性の WT 恒等式と U(1)対称性の WT 恒等式の間に、どちらかが成り立てばもう片方が自動的に成り立つという密な関係があることがわかる。我々はさらに、この関係を元に、連続極限において対称性が回復しているか否かを判定出来る観測量を特定した。数値計算は、並列化した計算コードを用いて統計処理を行うために十分な量のデータを集めると同時に、物理量の評価を行うためのコードを開発した。特に、フェルミオンが関係した物理量を評価する際には巨大な行列の逆行列を評価する必要があり、適切なアルゴリズムの選定と複数のコアを並列的に利用する処理が不可欠である。その開発にあたっては、コンパイラに付属のライブラリ自体に存在していたバグのために予想以上の時間がかかったが、現在ではそれも回避されて正しく評価できることを確認している。現在、蓄積したデータに対して観測量の評価を行っており、近々成果を論文で公表する予定である。

以上のように、本プロジェクトでは、2 次元理論から得られる知見が当初の予測よりも多く、本命の目的である 4 次元理論の数値計算に到達することが出来なかった。だが、ここで得られた 2 次元理論の知見は今後の研究にとって非常に有益である。この成果を次の研究計画に確実に生かすことが重要である。

(1)J.M.Maldacena,Adv.Theor.Math.Phys.2:231, 1999

(2)A.G.Cohen,D.B.Kaplan,E.Katz,M.Unsal,JHEP 0308:024, 2003, JHEP 0312:031, 2003: F. Sugino, JHEP 0401:015,2004: S. Catterall, JHEP 0411:006,2004: A. D'Adda, I. Kanamori, N. Kawamoto, K. Nagata, Phys.Lett. B633:645, 2006.
(3) A. G. Cohen, D. B. Kaplan, Emanuel Katz, M. Unsal, JHEP 0308:024, 2003, JHEP 0312:031, 2003.
(4) F. Sugino, JHEP 0401:015,2004.
(5) M. Hanada,S. Matsuura and F. Sugino, Prog.Theor.Phys.126 597(2011)

**５．主な発表論文等**

〔雑誌論文〕（計７件）

① "Commutative Geometry for Non-commutative D-branes by Tachyon Condensation", Tsuguhiko Asakawa, Goro Ishiki, Takaki Matsumoto, <u>So Matsuura</u>, Hisayoshi Muraki, Progress of Theoretical and Experimental Physics 2018 (2018) 063B04, 10.1093/ptep/pty062, (査読あり)
② "Numerical Analysis of Discretized N=(2,2) SYM on Polyhedra", Sho Kamata, <u>So Matsuura</u>, Tatsuhiro Misumi, Kazutoshi Ohta, Proceedings, 34th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2016) (2016) 210-210, (査読あり)
③ "O(a) Improvement of 2D N=(2,2) Lattice SYM Theory", Masanori Hanada, Daisuke Kadoh, <u>So Matsuura</u>, Fumihiko Sugino, Nuclear Physics B929 (2018) 266-297, (査読あり)
④ "Spherical D-brane by Tachyon Condensation", Tsuguhiko Asakawa, <u>So Matsuura</u>, Progress of Theoretical and Experimental Physics 2018 (2018) 033B01, 10.1093/ptep/pty006, (査読あり)
⑤ "Anomaly and sign problem in N=(2,2) SYM on polyhedra: Numerical analysis", Sho Kamata, <u>So Matsuura</u>, Tatsuhiro Misumi, Kazutoshi Ohta, Progress of Theoretical and Experimental Physics 16 (2016) 123B01-123B01, 10.1093/ptep/ptw153, (査読あり)
⑥ "Ising model on a twisted lattice with holographic renormalization-group flow", <u>So Matsuura</u>, Norisuke Sakai, Progress of Theoretical and Experimental Physics 113 (2015) B02, 10.1093/ptep/ptv147, (査読あり)
⑦ "A one-loop test for construction of 4D N = 4 SYM from 2D SYM via fuzzy-sphere geometry", <u>So Matsuura</u>, Fumihiko Sugino, Progress of Theoretical and Experimental Physics 43 (2016) B01, 10.1093/ptep/ptw014, (査読あり)

〔学会発表〕（計５件）

① "Supersymmetric Lattice Gauge Theories on Discretized Riemann Surfaces" <u>So Matsuura</u>, 3rd Bangkok Workshop on Discrete Geometry Dynamics and Statistics(招待講演)(国際学会), 2019年2月,
② "Topological Operators in 2D N=(2,2) Lattice SYM", <u>松浦壮</u>, 日本物理学会 秋季大会, 2017,
③ "Topological Observables in 2D SUSY Lattice Gauge Theories" <u>So Matsuura</u>, Discrete Approaches to the Dynamics of Fields and Space-Time(招待講演)(国際学会), 2017,
④ "Numerical Analysis of Discretized N=(2,2) SYM on Polyhedra", Sho Kamata, <u>So Matsuura</u>, Tatsuhiro Misumi, Kazutoshi Ohta, The 34th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2016)(国際学会), University of Southampton, Southampton, United Kingdom, 2016年07月24日-2016年07月30日,
⑤ "Analysis of 2dim. N=(2,2) super Yang-Mills theory on curved spacetime using lattice gauge theory", 太田和俊, 鎌田翔, <u>松浦壮</u>, 三角樹弘, 日本物理学会 第71回年次大会, 東北学院大学(宮城県 仙台市), 2016年03月22日-2016年03月22日

**６．研究組織**

**(1)研究分担者**

**なし**

**(2)研究協力者**

**研究協力者氏名：杉野　文彦**

**ローマ字氏名：** SUGINO, Fumihiko

**研究協力者氏名：花田　政範**

**ローマ字氏名：** HANADA, Masanori

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。