

令和元年6月16日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：15K05208

研究課題名（和文）量子相関の厳密な解析とクエンチ系への応用

研究課題名（英文）Exact analysis of quantum correlation and its application to quench systems

研究代表者

鈴木 淳史（Suzuki, Junji）

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：40222062

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、有限温度における動的量子相関関数に関して、量子逆散乱法、量子転送行列法および厳密WKB法に関する近年の進展と、形状因子展開を組み合わせることにより、新しい定量的解析の枠組みを提案した。その手法を特に量子スピン系に適用して、静的および動的相関関数について、既存の方法による結果を超える高精度な評価を行うことに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子相関の理解は、量子力学に基づいたナノテクノロジー、情報通信技術に必須である。これに関して厳密な結果をもたらしたことで、本研究はさらなる技術発展の基礎となりうるものである。相関関数の解析的評価は困難であると理論的にも考えられてきたが、数値計算まで精密に行える枠組みを提示した意義は大きい。

研究成果の概要（英文）：The present research establishes a new framework in quantitative analysis in dynamical correlation functions. It combined the recent developments in quantum inverse scattering method, quantum transfer matrix formalism and form factor expansions. We apply the novel formalism to the quantum spins chains and we successfully evaluate static and dynamical correlation functions with high precisions.

研究分野：統計力学、数理物理

キーワード：量子相関 量子転送行列 形状因子展開 厳密WKB法 量子逆散乱法

1. 研究開始当初の背景

(1) 近年、様々な低次元強相関量子系が実現可能となり、中性子線を用いた量子スピン鎖の構造因子や Feshbach 共鳴を利用した冷却原子系での量子クエンチをはじめとして、その量子相関が活発な研究対象となっている。これらの系は、それまで純粋に理論的な考察対象であり、実際の物理を記述するものではないと考えられてきた Lieb-Linger 模型や XXZ 模型といった可積分模型によって記述しうる点で大変興味深い。

(2) 可積分系とはいえ、基底状態および低励起状態に関するエネルギー固有値の情報が得られる情報の全てである。このため、波動関数に関する知識が必要である量子相関の定量的解析には大きな困難があった。

(3) ゼロ温度静的短距離相関に関する限り、神保・三輪・スミルノフらによる隠されたグラスマン構造の発見により、この状況は大きく変わった。スピン間距離が m の静的相関関数は m 重結合多重積分による表示が可能であるが、この隠されたグラスマン構造により基本的関数の積に因子化することが明らかとなり、定量的解析の道が一挙に開けたかのように見えた。現実にはスピン間隔に伴い項数が指数的に増大するため、さらなるアイデアが必要となった。

(4) さらに実験との比較のためには広い温度領域、磁場依存性、ドーブ濃度依存性など様々なパラメータ領域での解析が必要である。これに対しても従来の方法による解析では満足な結果が得られなかった。

2. 研究の目的

(1) 本研究は、量子逆散乱法、量子転送行列法および完全 WKB 法を結びつける事により、有限温度での形状因子を取り扱う新しい方法論を構築し、これにより高精度の定量的計算を行い、量子相関に関する理解を深めることを目的とする。さらに形状因子展開のアイデアを導入することにより有限温度長距離相関に対する評価法の確立を目指す。

(2) 静的相関関数を超え、平衡系の量子ダイナミクスに関しても同様な方法論を確立する。これにより、実験条件に合致する長距離、長時間における有限温度長距離相関の定量的計算に可能とする。さらに簡単な模型で得られた結果を標準的な方法による解析結果と比較する。

(3) 平衡系に対して、不連続な初期条件を与えることにより実現される量子クエンチに対して量子転送行列法による解析を行い、量子非平衡系に関する定量的解析法を確立する。

3. 研究の方法

(1) 凝縮系の標準的手法である松原グリーン関数を用いると、有限時間(実振動数)、有限温度(虚振動数)のいずれかを選択せねばならず、実験条件である有限温度、有限時間の両方を同時に満たすことが不可能である。そこで我々は M. Suzuki によって提案された量子転送行列の方法に基づいて解析を行った。これは仮想的な次元を新たに導入することにより、有限温度次元量子系の問題を、有限サイズ二次元古典系の問題としてとらえ直すものである。可積分系に適用する場合には、より強力な可換な量子転送行列の族を定義することが可能で、我々はこれを採用した。

(2) この結果、有限系の問題を厳密に取り扱う必要が生じる。これに対しては適当な補助関数とその間に成立する非線形積分方程式を導入するというアイデアを用いる。微分方程式の解析において独立に発見されていた完全 WKB 法を適用する事により、これらの補助関数を、厳密かつ高精度に評価した。

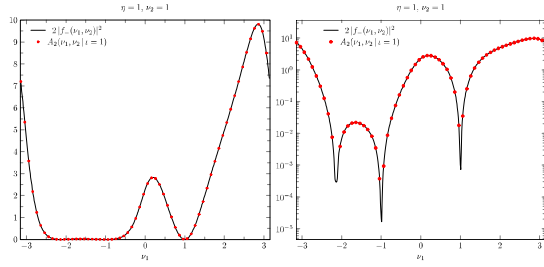
(3) スピン演算子を量子逆散乱法の枠内で取り扱うために逆問題を解く必要が一般には存在する。静的相関の評価に量子転送行列を採用する利点の一つは、これを回避できる事である。そのため有限温度相関の評価は、基底状態の相関関数の評価と平行に遂行可能である。一方、長距離相関やダイナミクスを問題にする場合には、形状因子展開の導入が必然となる。量子転送行列の枠内でゼロ温度における形状因子展開を自然に有限温度、有限時間に拡張可能であることを示し、これをスピン系の問題に適用した。

(4) 結果として長距離相関やダイナミカルな相関関数はフレッドホルム行列の評価および素励起に関する足し上げに帰着される。後者に対して Bornemann によって提唱された離散化を適用することにより、Fortran や Mathematica などの汎用プログラムを使用して数値計算を実行した。

4. 研究成果

(1) 形状因子法によるゼロ温度相関関数 (文献 5)

手始めとして、既知の結果が豊富に得られているゼロ温度の反強磁性領域でのスピン鎖の関する形状因子展開の再評価よりこの研究課題を開始した。熱力学的極限で系は少数個の励起パラメータにより記述され、それらの間に成立する Higher level ベーテ方程式が 80 年代より盛んに解析されてきた。ゼロ温度であるため、通常の形状因子法が適用でき、先ほどの励起パラメータによる Fredholm 行列式による表式が得られる。これを具体的に評価するにあたり、いくつかの矛盾が見つかり、Higher level ベーテ方程式での標準的な参考文献となっている Babelon 達の結果まで遡って再検討することにより、その誤謬を指摘した。この訂正後、得られた定量的結果は、頂点作用素法という全く異なる発想で得られた結果と完全に一致することが確かめられた。(右図の曲線は頂点作用素法による結果で赤点は我々の結果である。) 一方、ストリング解を励起として含む場合、その解析的な特異性のため、高次の励起を取り込むことが困難であることも認識された。

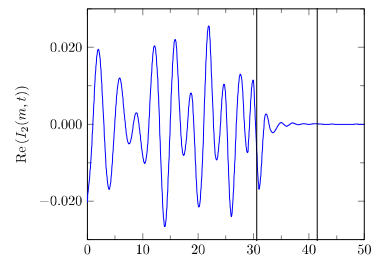


(2) 有限温度における相関長の評価と Higher level ベーテ方程式 (文献 4)

文献 での考察を有限温度の場合に適用した。これにより量子転送行列の可能な素励起を分類し、その固有値分布に関して詳細な情報を得ることができた。ゼロ温度の場合、列転送行列の素励起は複雑で上に述べたように解析的特異性をもつストリング解などが重要な励起となる。一方量子転送行列に対する数値的対角化と Higher level ベーテ方程式を組み合わせた解析から、有限温度から出発して、ゼロ温度の極限を考える場合、素励起は著しく簡明である、ということが判明した。すなわち可能な励起は本質的に粒子・正孔励起のみである。この結果は特に形状因子展開に対して重要な意味をもつ。形状因子展開で中間状態として解析的な性質の良いものだけ足しあげれば十分だからである。

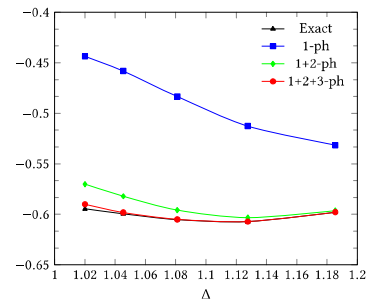
(3) ゼロ温度での動的相関関数に対する形状因子展開 (文献 3)

動的相関関数の評価の手始めとして、ゼロ温度での形状因子展開を行った。すでに(1)で Fredholm 行列式を用いると、ストリングを含む励起状態に困難があることが判明しているため、ここでは形状因子の評価に頂点作用素法によるものを採用した。漸近的領域の解析のため、鞍部点法により形状因子展開を評価することにより、動的相関関数の振る舞いは空間領域、前駆的領域、時間的領域の3つの異なる領域に分類されることが示された。それぞれの領域の境界はスピン間距離/時間が Lieb-Robinson bound に対応する二つの臨界的速度に等しくなる点という明快な定義をもつ。(右図は主に空間領域での時間発展の様子) 異方性ゼロのハイゼンベルグ極限での漸近的振る舞いは興味深い。この領域に対しては共形場理論に基づく Affleck による予想がある。我々の数値計算もこの予想を支持する。(論文としては未発表)



(4) 静的相関関数に対する形状因子展開の定量評価 (文献 2)

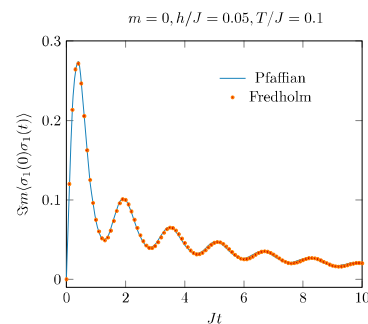
有限温度に関して自然に拡張された形状因子展開法を用いて相関関数の表式は容易に得られる。中間状態に関する足し上げには、文献 2 で示されたようにゼロ温度の極限で、粒子・正孔励起のみ考慮すればよい。さらにこれらの間の相互作用はゼロ温度の極限で消えてしまい、強相関系であるにも関わらず励起は自由粒子として振る舞うことが示せる。このため、中間状態に関する足し上げが比較的容易に実行可能となった。そのため、通常のスピン描像では6スピノンにあたる、と考えられる高い励起状態まで取り込んだ高精度な計算を実行できた。(右図は異方性を横軸に最近接相関をプロットしたもので、最も下の黒線は厳密な値である。励起を足しあげることにより近似が改善されていくのが見て取れる。) この結果を厳密な短距離相関や、有限系の厳密対角化、DMRG などの標準的な数値的手法と比較し、その正当性を検証した。



(5) 動的相関関数に対する形状因子展開法の定式化 (文献)

静的相関関数とは異なり、有限温度での動的相関関数を量子転送行列法で取り扱う場合には二重の逆問題を解くことが必要になる。この結果を拡張された格子上的 2 点相関問題に帰着さ

せる定式化を提案した。この場合スピン間隔はもとの m から $m+$ トロッター数へと変化する。すなわちトロッター極限では無限に離れたスピン相関を評価する必要があるため、形状因子展開の導入が必然となる。具体的に XXZ スピン鎖に関する表式を与えたが定量的評価は将来への課題として残された。より単純な XX 模型に対してその縦相関を解析して、フェルミオンを用いたよく知られた結果と一致することを確認した。(右図は動的自己相関関数の虚部の短時間における時間発展を表したもので、曲線はフェルミオンを用いた結果、点は我々の結果であり、両者は完全に一致している。)



(6) 量子転送行列に関するいくつかの性質の高温極限での厳密な証明

(3)-(5)の内容の完成後、さらに量子クエンチなどの非平衡の問題の解析に進む予定であったが、それ以前に我々が量子転送行列に対して仮定したいいくつかの性質に関して証明を行っておくべきである、との研究協力者の意見に従い(a)トロッター極限と熱力学的極限の可換性(b)量子転送行列の最大固有値状態がユニークに存在する事。(c)量子転送行列の固有状態を記述する非線形積分方程式(NLIE)の存在とその解がユニークに決まる事。(d)量子転送行列の最大固有値に対応するNLIEの具体形の同定と対応する最大固有値の評価、について高温極限での厳密な証明を与えた。論文はプレプリントとして公開され(arXiv:1811.12020)、現在学術誌に投稿中である。

以上のように動的相関関数の定量評価と非平衡の問題の解析に関して今後の課題として残ってしまった。幸い当該課題の次の課題である研究が現在継続的に進行しており、具体的な結果の一部をすでにプレプリントサーバーに公開できている(arXiv:1905.04922, 1906.03143)。量子クエンチ系に関しては、そのような特異な初期状態を扱うだけでなく拡張された流体力学の一部として扱う事の方が適切であることが認識されその立場から現在研究を進めている。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 5 件)

F. Göhmann, M. Karbach, A. Klümper, K. Kozłowski, J. Suzuki, “Thermal form-factor approach to dynamical correlation functions of integrable lattice models”, Journal of Statistical Mechanics, 査読有, 2017,1-43pp, DOI <https://doi.org/10.1088/1742-5468/aa9678>

M. Dugave, F. Göhmann, K. K. Kozłowski, J. Suzuki, “Thermal form factor approach to the ground-state correlation functions of the XXZ chain in the antiferromagnetic massive regime”, Journal of Physics A, 査読有, 49 巻, 2016, 394001, <https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/39/394001>

M. Dugave, F. Göhmann, K. K. Kozłowski, J. Suzuki, “Asymptotics of correlation functions of the Heisenberg-Ising chain in the easy-axis regime”, Journal of Physics A, 査読有, 49 巻, 2016, 07LT01, 11 ページ, DOI <https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/7/07LT01>

M. Dugave, F. Göhmann, K. K. Kozłowski, J. Suzuki, “Low-temperature spectrum of correlation lengths of the XXZ chain in the antiferromagnetic massive regime”, Journal of Physics A, 査読有, 48 巻, 2015, 334001, DOI <https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/33/334001>

M. Dugave, F. Göhmann, K. K. Kozłowski, J. Suzuki, “On form-factor expansions for the XXZ chain in the massive regime”, Journal of Statistical Mechanics, 査読有, 2015, 1-48pp, DOI <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2015/05/P05037>

[学会発表](計 9 件)

Junji Suzuki, “Variations on Zamolodchikov's themes”, Non-Perturbative Methods in Field Theory and String Theory, (京都大学) 2018

2 Junji Suzuki, “The equilibrium dynamics of quantum spin chains”, Correlations in Integrable Quantum Many-Body Systems III (ドイツ), 2018

3 Junji Suzuki, “The static and the dynamical form factor expansion approach to quantum correlations”, Correlations in Integrable Quantum Many-Body Systems II (ド

イツ), 2017

4 Junji Suzuki, “A form factor expansion approach to dynamical correlation functions of quantum spin chains”, Integrability in Low-Dimensional Quantum Systems (オーストラリア), 2017

5 Junji Suzuki, “Thermal form factors and form factor series for correlation functions of the Heisenberg-Ising chain: I”, New trends in Low Dimensional Physics (北京), 2016

6 Junji Suzuki, “Form factor expansions of the spin 1/2 XXZ model”, Recent Advances in the Theory of Quantum Integrable Systems 16 (スイス), 2016

7 Junji Suzuki, “Spinon expansion of correlation functions of the spin1/2 XXZ chain in massive regime”, Correlations in Integrable Quantum Many-Body Systems I (ドイツ), 2016

8 Junji Suzuki, “A form factor expansion approach to correlations of the spin1/2 XXZ chain”, Rikkyo Math-Phys 2016, 2016

9 Junji Suzuki, “Correlation functions of the Heisenberg-Ising chain”, Baxter 2015: Integrability and Beyond(オーストラリア), 2015
〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

なし

(2)研究協力者

研究協力者氏名: Frank Göhmann

ローマ字氏名(Frank GOEHMANN)

研究協力者氏名: Karol Kozłowski

ローマ字氏名(Karol KOZŁOWSKI)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。