

令和元年6月6日現在

機関番号：14501

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2018

課題番号：15K11990

研究課題名(和文) 組合せ最適化問題に対する乗算と浮動小数点演算を用いない高速大域最適化手法

研究課題名(英文) A Tractable Enumeration without Multiplication and Floating-Point Operation for Combinatorial Optimization Problems

研究代表者

森 耕平 (Mori, Kohei)

神戸大学・システム情報学研究科・助教

研究者番号：70359868

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：01二次計画は、基本的かつ非常に単純な形でありながら、現実的な規模であっても現実的な時間で解くことが困難な計算問題である。

この問題を掛け算も小数も使わずに解く風変わりな計算手順を提案・解析し、コンピュータプログラムとして記述するための詳細を検討し、問題の規模が大きくない場合には極めて効率的な計算手順であることを示した。

また、この問題を一般化した数学の問題が持ついくつかの性質を証明した。さらに、ロボット等の動的システムを思い通りに動かす問題や学習塾の時間割を作成する問題への応用を検討し、研究により得られた見地がこれらの応用につながることを確認した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ハードとソフトの両面の豊富な資源の利用を念頭に置くことなく、極めて基本的な演算である加減算の使い方の工夫や計算順序の交換により難しい計算(最適化)問題を高速に解く試みは、この分野の黎明期を除いてほぼ行われていない。そのため、この問題設定の下で解析的(数学的)な性質を示したことは、研究成果としての希少性の意義だけではなく、多くの場合に間接的であるが、広い応用分野における計算の効率化をもたらさう。実際に、本来の研究対象を一般化した数理計画問題やスケジューリングにおける応用の検討も行えている。

研究成果の概要(英文)：Boolean quadratic programming is a basic and very simple computational problem. However, it is difficult to solve in moderate time even when the size is normal.

We proposed and analyzed a tractable and strange procedure that can be implemented without multiplications and decimals. Then we examined the details for writing the procedure as a computer program. It is shown that the procedure is extremely efficient when the size of instance is small. We also proved some of properties of the generalized mathematical programming problems.

The viewpoint and knowledge obtained by the research lead us to applications such as control of dynamical systems and making time schedule tables.

研究分野：数理計画

キーワード：01二次計画 大域最適化 組合せ最適化 緩和問題 最適制御 スケジューリング

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19（共通）

1. 研究開始当初の背景

(1) NP 困難な最適化問題に対する最適化手法の最近の研究は、ほぼ全てが豊富な計算資源の利用を仮定したものである。その中身も、理論的な保証とはかけ離れた非常に複雑な工夫に関するもの、最初から大域最適化をあきらめたメタヒューリスティック、特定の応用を念頭に置いたものが中心である。このことは、研究期間の開始時点においても終了時点においても変わらない。

(2) 対して本研究は、加減算の順序の変更、探索の順序の変更、乗除算も浮動小数点型のデータも用いずに行われる最適値の下界の計算や最適性条件の確認、予め詳細に見積もれる多項式オーダーの空間計算量など、極めて基本的な部分の解明や構築を主目的としたものである。本研究の位置付け自体が現時点ではほとんど行われていない方向性のものであり、計算や最適化の原理の部分に極めて近いものであることから、得られた成果の将来における応用範囲は非常に広いものであると考えられる。01 二次計画に対して研究代表者が提案した風変わりな大域最適化アルゴリズムが本研究の出発点であり、その基本構造は 01 二次計画に対しては研究期間の開始時において概ねできていた。

2. 研究の目的

(1) 組合せ最適化問題を対象とし、a. 乗算が不要、b. 入力が整数ならば浮動小数点演算も不要、c. 空間計算量は多項式オーダー、の性質を持つ高速な大域最適化手法（厳密解法）を構築すること、実応用の検討、関連する数理計画問題の性質の解明を目指す。

(2) 01 二次計画のような見掛けが単純な場合も含めて多くの組合せ最適化問題は NP 困難であり、それらに対する高速な大域最適化手法は、直接の応用に限らず各種の最適化手法のサブルーチンとしても有用である。a, b, c の性質を持つ手法の応用として、例えば、決定変数の数がそれほど大きくない大域最適化問題のサブルーチンとしての頻繁な利用、人工衛星・スマートハウス・スマートグリッドの局所的な制御のように計算時間や使用するメモリだけでなく計算で使用される電力も重要な場合などが挙げられる。

3. 研究の方法

(1) 基本的な研究方法は、研究代表者が一人で紙の上と頭の中で行う数学面の解析である。通常のパソコン上で行う予備数値実験や高性能な計算機で行う広めの数値実験なども行う。

(2) 01 二次計画を対象とした所望の大域最適化アルゴリズムの骨子は研究機関の開始時において概ね得られていた。まず、そのアルゴリズムの性質の理論的保証とアルゴリズムの改訂やサブルーチンの追加による性能の向上を目指し、局所最適性条件の利用や計算過程において自然に得られる最適値の下界の精度の向上などに関する一定の成果を得た。

(3) しかし、元々の中心となる目標である、最適化アルゴリズムの基本構造を活かしたまま計算効率を劇的に向上させるまでの成果はなかなか得られなかった。そのため、地道な解析や考察や実験を続けながらも、元々は優先順位の低かったアルゴリズムの実装面の詳細な検討、対象となる最適化問題を一般化した上での得られた見地の利用、得られた見地の実応用における利用などを中心に行うこととなり、この方面において一定の成果を得た。

4. 研究成果

(1) 01 二次計画に対する乗算と浮動小数点型データを用いない大域最適化手法の基本構造を保ったままの解析により、次の成果を得た。(発表論文等の③等)

① KKT 条件に近い局所最適性条件を導出し、これの利用によりアルゴリズムの骨子を大きく変更することなく局所最適解が存在しない範囲を特定することで探索範囲を狭めることが可能であることを示した。また、同様の条件を複数個利用することで局所最適解が存在しない範囲の特定の精度が向上することを示した。

② 最適解(大域最適解)が存在しない範囲を特定するために用いる最適値の下界の計算方法の一般化(下界の強化)を行った。また、NP 困難である範囲で問題のインスタンスを限定した場合に下界の精度を向上させる方法を幾つか示した。

③ アルゴリズムの細部の検討と数値実験を行い、問題のサイズが小さい場合には良好な性能を示すことを確認した。また、研究成果に関する解説を書く過程でアルゴリズム全体を検討し直すことにより、アルゴリズムの整理が行え、明確さを犠牲にすることもアルゴリズムを変更することもなく、研究機関開始時と比べると非常に簡潔な形式での記述が可能になった。

(2) 実際に乗算と浮動小数点を用いない実装と数値実験を行い、乗算と浮動小数点演算が不要であるという当初の主張の技術面での裏付けを行った。アルゴリズムの性質上、原理の上では乗算や浮動小数点演算を用いずに実装できることは分かっていたが、実際にそのように実装する難しさや実装の効果が自明ではなかったものを、実際に詳細を検討して実装して示し、乗算と浮動小数点を用いない実装により少なくとも2倍から4倍程度の高速化が行われることを数値実験により確認した。また、そのように実装した後でプログラムを書き換えることの困難さを把握でき、このことは応用を考える際に役立つものであった。(発表論文等の④)

(3) 01 二次計画を一般化した最適化問題である、非凸な二次関数を幾つかの条件を満たす非凸な二次制約下で最小化する最適化問題に対して本研究の中で得られた考えを適用し、多項式時間で解くことが可能な緩和問題の幾つかの性質を示した。特に、緩和問題の精度を許容領域のどの部分付近で向上させるかを、緩和問題における制約条件を追加することなく連続的に選択する方法を示した。(発表論文等の②,⑦)

(4) 研究の中心にある 01 二次計画に対する大域最適化アルゴリズムの応用面を検討した。

① 入力がスイッチの ON/OFF 等の 2 値に制限された制御 (bang-bang 制御) による最適制御問題が 01 二次計画で表現されることを示した。また、最適制御を考える時間の範囲がそれほど長くない状態数や入力数がそれほど多くない場合には、この最適制御問題を表現した 01 二次計画のサイズが本研究のアルゴリズムが他の最適化アルゴリズムよりも遥かに効率的と思われる範囲と実際の応用において意味のある問題のサイズが重なることを確認した。なお、本研究の最適化アルゴリズムは浮動小数点演算も乗算も用いないものであり、さらに、空間計算量が予め詳細に見積もることが可能な低い次数の多項式であるため、電力制限のために性能が非常に低い制御器(制御用コンピュー

タ)を用いる利点がある場合などに有用であると考えられる。(発表論文等の⑥)

② 個別指導学習塾における講師と生徒と科目のマッチング問題に対して提案したメタヒューリスティック解法の一つ(ここでは貪欲解法の一つ)において,本研究のアルゴリズムを実際に浮動小数点演算や乗算を用いずに実装する際に得られた見地を利用して,計算の相当部分が各要素が1ビットの配列に対する論理演算として表現される実装を行った.その結果,通常の素直な実装だと数十秒から数分,抽象化したレベルで工夫をした実装で1,2秒程度かかる計算を1ミリ秒以内で行えた.また,この実装の過程において,マッチングの問題の数理面の性質(Totally Unimodularity)が抽出された.(発表論文等の①)

③ 最適化問題や最適化手法としてではないが,非線形な動的システムの安定性解析における関数の基底の並び替え手順と本研究課題における探索順序の変更の関連性を考察した.(学会発表の①)

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 8 件)

① 森 耕平,吉岡由貴,羅志偉:“個別指導学習塾の生徒-講師-科目の割当問題の係数行列の Totally Unimodularity”,第 63 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, 査読無(形式的な査読のみ), pp.738-741, 2019

② 森 耕平:“Outer Approximations Using Dikin Ellipsoid Based Nonconvex Sets”,第 61 回自動制御連合講演会講演論文集, 査読無, 2018

DOI:https://doi.org/10.11511/jacc.61.0_1647

③ 森 耕平:“01 二次計画に対する乗算と浮動小数点演算を使わない高速列挙解法”,システム/制御/情報, 査読無(執筆を依頼された解説), Vol.62, No.5, pp.169-174, 2018

DOI:https://doi.org/10.11509/isciesci.62.5_169

④ 森 耕平:“01 二次計画に対する乗算の不要な列挙解法の高速度化技法”,第 60 回自動制御連合講演会講演論文集, 2017

DOI:https://doi.org/10.11511/jacc.60.0_1543

⑤ 松井 一步,森 耕平:“01 二次計画の高速列挙解法におけるインスタンスに応じた下界の調整”,第 61 回システム制御情報学会研究発表講演会講演発表論文集, 査読無, 2017

⑥ 森 耕平:“予測制御における小規模な 01 二次計画の非常に軽い解法”,平成 28 年電気学会電子・情報・システム部門大会講演論文集, 査読無, 2016

<https://pdf.gakkai-web.net/gakkai/eiss/program/pdf/MC2-7.pdf>

⑦ 森 耕平,原井 夏樹:“楕円制約下での大域最適化における局所最適性条件の扱い”,第 60 回システム制御情報学会研究発表講演会講演発表論文集, 査読無, 2016

⑧ 森 耕平,原井 夏樹,松井 一步:“01 二次計画に対する乗算不要な列挙解法中の下界と局所最適性条件の解析”,第 59 回システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, 査読無, 2015

[学会発表] (計 1 件)

① MORI, Kohei:“A Random Sampling Approach to Prove Stability/Instability of Dynamical Systems”, Japan-Asia Youth Exchange Program in Science(SAKURA SCIENCE, 日本・アジア

青少年サイエンス交流事業さくらサイエンスプラン), 2018

[図書] (計 0 件)

[産業財産権] (計 0 件)

[その他] (計 0 件)

6. 研究組織

該当なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。