

平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：12102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K11992

研究課題名(和文) 統計的欠損性の階層構造の解明とその応用

研究課題名(英文) The clarification of hierarchical structure of statistical deficiency

研究代表者

赤平 昌文(AKAHIRA, Masafumi)

筑波大学・数理物質系(名誉教授)・名誉教授

研究者番号：70017424

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：統計的推測において、様々な前提条件の下で推測方式を比較することが多く、またその定量的評価も重要になる。本研究では、ある母集団分布から得られた大きさ $n$ の無作為標本に基づいて、特定の推測方式A、Bについて、 $n$ が無限に大きいときに、AがBよりも漸近的に優れていることを示すとともに、Aに対するBの漸近損失を求め、次数による階層構造を解明した。その際、或る次数では漸近的に同等でも、次の次数ではその差異が漸近損失として現れる階層構造を有しており、また漸近損失を漸近欠損量として捉えられる。

研究成果の概要(英文)：In statistical inference, there are many problems that inferential procedures are compared under various assumptions, and in such cases the quantitative evaluation is important. In the research, for specific inferential procedures A and B based on a sample of size  $n$ , if A is asymptotically better than B as  $n$  tends to infinity, we obtained the asymptotic loss of B relative to A, and clarify its structure. Indeed, there is such a hierarchical structure depending on  $n$  that A and B are a certain order asymptotically equivalent, but the difference between A and B in the next order exists. The asymptotic loss is also understood as asymptotic deficiency.

研究分野：数理統計学

キーワード：漸近損失 最尤推定量 Bayes推定量 切断指数型分布族

## 1. 研究開始当初の背景

統計的推測において、様々な前提条件の下で推測方式の比較をすることが多く、またその定量的評価も重要になる。特に、従来、推定において母集団分布に関する正則条件が満たされるような正則な場合には(漸近)有効推定量を標本の大きさ  $n$  の次数による階層化によって精確に論じられ(Akahira-Takeuchi(1981, 2003), Pfanzagl-Wefelmeyer(1985), Ghosh(1994))、また、検定においては、同じ有意水準をもつ尤度比検定、Wald 検定、Rao 検定、局所最強力検定は2次の漸近局所最強力検定であるが、3次の漸近局所最強力検定にはならないことが知られている(Hayakawa(1977), Chandra-Joshi(1983), Amari(1983))。しかし、必ずしも正則条件が満たされないような場合には、階層化の見地からの推測が十分に行われてこなかった。一方、非正則な場合の典型として切断分布があるが、これは物理学、水文学、地質学、天文学等の分野でよく用いられ、応用分野において有用である。

正則と非正則をつなぐような分布族の場合に階層化の観点から推測方式の比較の理論的根拠を考察することは重要であり、推測の理論的基礎を与えることになる。

従来、正則な場合には高次漸近理論の観点から最尤推定量(MLE)、Bayes 推定量(BE)等が偏り補正すれば母数の周りへの漸近集中確率の意味で高次まで漸近的に同等であることが示された(Akahira-Takeuchi(1981), Pfanzagl-Wefelmeyer(1985), Ghosh(1994))。しかし、非正則な場合には必ずしもそうはならない。そこでMLEとBEが、正則な場合から非正則の方向にずれたときに、或る次数までは漸近的に同等であるが、それを越えた次数では漸近的な差異が出現する可能性がある。そのような微妙な状況が出現する可能性を突き止めることによって、推測の階層構造が明確になるとともに、応用上でもMLEとBEのいずれかをを用いれば良いかについて指針を与えることになる。

## 2. 研究の目的

統計的検定において主要な2標本問題では、通常、母集団分布に正規分布であるという正規性の条件を仮定している。しかし、この条件は厳しく、応用上は満たされないことも多いので、それを外す試みは行われてきた(Bentkus et al.(2007), Akahira et al.(2013))。本研究では、次数による階層的観点から、検定統計量として重要な非心  $t$  統計量の分布のパーセント点の高次近似を行って精確化を図る。

統計的推定において、正則と非正則をつなぐような分布族として重要である、自然母数と切断母数をもつ切断指数型分布族においてMLEとBEの2次までの漸近同等性を踏まえて、さらに3次の次数での両者の差異について考察する。そのことによって、推定にお

ける次数による階層構造を明確にする。

## 3. 研究の方法

統計的検定の2標本問題において、非正規性の下で非心  $t$  統計量  $T$  を規準化してからCornish-Fisher展開を用いて、 $T$  の分布のパーセント点の高次近似を求めた。そして、 $T$  に基づく検定の検出力関数を漸近的に求めて、その精確性について検討した。また、統計的推定において、自然母数と切断母数をもつ切断指数型分布族においてMLEとBEの高次の確率展開を求めて、それに基づいて高次の漸近分散、漸近集中確率を得て、それらの間の差異の漸近的評価を行った。

## 4. 研究成果

通常、統計的2標本問題において、正規性の仮定の下で2つの平均の同等性の検定や、それらの差の区間推定では、非心  $t$  統計量が用いられ非心  $t$  分布のパーセント点が必要となるが、解析的に求めることは困難である。そのためにその数表が作成され、種々の近似式も提案されてきた(Johnson et al.(1995), Bagui(1993), Akahira(1995), Akahira, et al.(1995))。しかし、正規性の仮定は強いので、それを外す試みも行われてきた(Bentkus et al.(2007), Akahira et al.(2013))。本研究において、非正規性の下で、有意水準から非心  $t$  統計量  $T$  の分布のパーセント点の高次近似を用いて棄却限界値を求めた上で、Edgeworth展開を用いて  $T$  に基づく検定の検出力関数の2次の近似を求めた。そして指数分布等の場合に数値計算の観点からその精確性を確認した。この結果によって、正規性が成り立たないことが多い現実の問題への適用が可能になった。

統計的推定において、自然母数と切断母数をもつ切断指数型分布族において、が既知のときにのMLEとBEは偏り補正後にそれらの漸近分散は2次まで同等になるが、3次の次数ではBEがMLEより良くなることが示され、BEに対するMLEの3次の漸近損失も求められた。そして水文学等の分野で有用な下側切断指数分布、下側切断正規分布、パレート分布の例も与えられた。正則な場合にはMLEとBEは偏り補正後はともに3次の漸近的有効になり、3次の次数まで漸近的に同等であることが知られているので、切断指数型分布族の場合にはそうならないという結果である。このことはAI等の基盤となるBayes方式の有利性を示す根拠を与えたことになる。また、従来、が既知のときのMLE( )とが未知のときのMLEについては偏り補正後に2次の漸近分散によってMLE( )に対するMLEの2次の漸近損失が求められていたが、もっと精密に、2次の漸近集中確率による2次の漸近損失も得られた。この結果から切断指数型分布族における最尤推定量に基づく高次の区間推定も可能になり、また最尤推定における次数による階層

構造もさらに明確になった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計12件)

1 赤平昌文(2018). 統計的推測理論の深化と進展のヒストリー. 日本統計学会誌 47, 51-76, 査読有

2 赤平昌文(2018). Asymptotic comparison between the maximum likelihood estimator and Bayes estimator for a certain truncated exponential family. 京都大学数理解析研究所講究録 2047, 172-181, 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2047-15.pdf>

3 Akahira, M. and Ohyauchi, N.(2017). Second-order asymptotic loss of the MLE of a truncation parameter for a truncated exponential family of distributions. Commun. Statist. - Theory and Meth., 46, 6085-6097, 査読有, DOI 10.1080/03610926.2015.1117638

4 石原隆佑・小池健一(2017). Exponential-symmetry and power-symmetry. 京都大学数理解析研究所講究録 2047, 152-171, 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2047-14.pdf>

5 矢田和善・青嶋誠(2017). 高次元固有ベクトルの一致性. 京都大学数理解析研究所講究録 2047, 19-28, 査読無, <http://http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2047-03.pdf>

6 Akahira, M.(2016). Second order asymptotic variance of the Bayes estimator of a truncation parameter for a one-sided truncated exponential family of distributions. J. Japan Statist. Soc., 46, 81-98, 査読有

7 Akahira, M. and Ohyauchi, N.(2016). Second order asymptotic loss of the MLE for a two-sided truncated exponential family of distributions. J. Japan Statist. Soc., 46, 27-50, 査読有

8 Akahira, M., Hashimoto, S., Koike, K. and Ohyauchi, N. (2016). Second order asymptotic comparison of the MLE and MLE for a two-sided truncated exponential family of distributions. Commun. Statist. - Theory and Meth., 45, 5637-5659, 査読有, DOI 10.1080/03610926.2014.948202

9 赤平昌文(2016). On the information on skew-normal distributions. 京都大学数理解析研究所講究録 1999, 13-16, 査読無, <http://hdl.handle.net/2433/224775>

10 赤平昌文(2016). The power of the test based on the non-central t-statistic under

non-normality. 京都大学数理解析研究所講究録 1999, 174-187, 査読無, <http://hdl.handle.net/2433/224763>

11 中山優吾・矢田和善・青嶋誠(2016). 高次元小標本におけるサポートベクターマシンの一致性について. 京都大学数理解析研究所講究録 1999, 17-27, 査読無, <http://hdl.handle.net/2433/224774>

12 矢田和善・青嶋誠(2016). Estimation of a signal matrix for high-dimensional non-Gaussian data. 京都大学数理解析研究所講究録 2047, 36-46, 査読無, <http://hdl.handle.net/2433/224772>

〔学会発表〕(計5件)

1 赤平昌文: 統計的推測理論の深化と進展のヒストリー. 2017年度統計関連学会連合大会(招待講演), 2017年9月5日, 南山大学(名古屋市昭和区)

2 矢田和善・青嶋誠: 高次元空間における特徴ベクトルの一致推定について. 2017年度統計関連学会連合大会, 2017年9月6日, 南山大学(名古屋市昭和区)

3 矢田和善・青嶋誠: Reconstruction of a high-dimensional low-rank matrix. 2016年度統計関連学会連合大会, 2016年9月7日, 金沢大学(金沢市角間町)

4 田崎雅裕・小池健一: Skew q-gaussian distribution. RIMS 共同研究による研究会, 2016年3月7日, 京都大学数理解析研究所(京都市左京区)

5 橋本真太郎・小池健一: Reference prior via  $\phi$ -divergence in non-regular multi-parameter case. 日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月16日, 京都産業大学(京都市北区)

〔図書〕(計1件)

1 Akahira, M.(2017). Statistical Estimation for Truncated Exponential Families. Springer, Singapore, xi+122pp, 査読有

〔その他〕

ホームページ

[www.math.tsukuba.ac.jp/~akahira/masafumi/](http://www.math.tsukuba.ac.jp/~akahira/masafumi/)

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

赤平昌文(AKAHIRA Masafumi)

筑波大学・名誉教授

研究者番号: 70017424

### (2)研究分担者

青嶋誠(AOSHIMA Makoto)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号: 90246679

小池 健一 (KOIKE Ken-Ichi)  
筑波大学・数理物質系・准教授  
研究者番号：90260471

矢田 和善 (YATA Kazuyoshi)  
筑波大学・数理物質系・准教授  
研究者番号：90585803

大谷内奈穂 (OHYAUCHI Nao)  
筑波大学・数理物質系・助教  
研究者番号：40375374