

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 27 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2015

課題番号：15K11994

研究課題名(和文) 時空間統計解析に対する周波数領域における推測理論

研究課題名(英文) Inference Theory in the frequency domain of spatio-temporal statistical analysis

研究代表者

矢島 美寛 (YAJIMA, Yoshihiro)

東京大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号：70134814

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,100,000円

研究成果の概要(和文)：時空間データを解析するための代表的確率モデル定常確率場に対するパラメトリック・モデルの妥当性を検定する際に、観測値のフーリエ変換に基づく新たな検定統計量を提案した。この検定統計量はピリオドグラムと呼ばれるフーリエ変換の絶対値の2乗を異なった周波数において計算しそれをカーネル関数で平滑化した量である。想定したパラメトリック・モデルが正しいという帰無仮説の下で、この統計量はカーネル関数の積分のみに依存し他の未知の量には依存しない簡潔な漸近期待値と分散をもつ。したがって実際のデータ解析にも簡単に応用できる。また現在確認中であるが漸近正規性も成立すると予想される。

研究成果の概要(英文)：We proposed a new test statistic based on discrete Fourier transform of spatio-temporal data for parametric models of stationary random fields. It is constructed by smoothing periodograms of different frequencies by a kernel function. Under the null hypothesis in that a supposed parametric model is true, the test statistic has simple asymptotic expectation and variance, and hence it can be implemented easily to analyze actual data. Furthermore it is expected that it is asymptotically normally distributed.

研究分野：統計科学・計量経済学

キーワード：時空間統計解析 周波数領域解析 時空間データ 不規則間隔データ 大規模時空間データ

1. 研究開始当初の背景

時空間統計データは、たとえば環境学では地球温暖化・地震の発生時点・地点の研究、疫学では伝染性疾患の感染経路の研究、経済学では都市の発生・発展過程あるいは産業の集積過程の研究など広く広範な学問分野に存在する。

これらの時空間データを解析する様々な統計学的手法も提案され、その理論的性質の解明および実際の時空間データを解析する際の有用性についての研究も近年目覚ましい発展を遂げている。

その中で従来時系列データを解析する際の代表的かつ有用な手法として観測値のフーリエ変換を用いる手法がある。様々な周波数におけるその強度を明らかにすることにより、データに内在する支配的な周期を検出すること、あるいは将来の値の予測などの目的に応用する。

創始者のフーリエ以来フーリエ解析は 200 年以上の歴史を持つが、解析学においてはフーリエ級数が各点収束、一様収束、概収束、平均 2 乗収束するための十分条件などが明らかにされてきた。また熱伝導などの物理現象の定式化などにも応用されている。

一方時間の推移とともに観測される時系列データの解析のために、フーリエ解析は 19 世紀の終わり頃から応用され始め、たとえば太陽の黒点の周期の検出などに利用されている。その後 20 世紀に入ってから確率過程の理論的発展と相伴って、中でも定常過程にしたがう観測値のフーリエ変換の理論的性質の解明は、観測値間の自己相関が時間差の増大とともに速やかに 0 へ収束する短期記憶過程から減衰の速度が緩慢な長期記憶過程に至るまで大きな発展を遂げてきた。

実用上も等間隔で並んだ異なる周波数に対するフーリエ変換は一般的な仮定の下で漸近的には互いに無相関になるので、時間領域では解析的に表現することが困難な尤度関数の近似表現を周波数領域で容易に得ることができる。また大規模データに対しても高速フーリエ変換などを用いれば迅速に計算可能になるという利点をもつ。

一方時空間データに対する周波数領域の解析についての研究は 21 世紀に入ってから本格的になったが、まだ未解明な点が多々ある。また応用上の有用性についての研究も緒に就いたばかりである。

本研究では時系列解析における定常過程を一般化した定常確率場あるいは固有定常確率場と呼ばれる非定常確率場における観測値のフーリエ変換、この場合は時系列データと異なり 1 変数ではなく多変数フーリエ変換になるが、その理論的性質、どこまで定常過程の場合のアナロジーが成立するか？さらにどこから先は定常確率場特有の性質が成立するかを明らかにする。この性質に基づき時空間統計解析における推測理論の発展に寄与するとともに実際のデータ解析への

応用可能性を検討する。

2. 研究の目的

(1) 上述の背景の下で、まず定常確率場から得られた観測値の離散フーリエ変換およびその絶対値の 2 乗であるペリオドグラムの漸近的性質を導く。

(2) 定常確率場に対するパラメトリックモデルの統計的仮説検定において、新たな検定統計量を提案する。(1)で導出した離散フーリエ変換およびペリオドグラムの性質に基づき、提案した検定統計量の理論的性質を明らかにする。

(3) 離散フーリエ変換、ペリオドグラム、および検定統計量の理論的性質を明らかにする場合に 2 つの点に留意する。時系列データにおいては日次、週次、4 半期など等間隔時点で観測される場合が多い。一方時空間データにおいては、観測地点・時点が不等間隔な場合が多い。本研究では観測地点・時点がランダムに選択されるという枠組みの中で理論展開を考える。

また時空間データは観測地点が地球規模になる場合や、リモートセンシングなどにより観測される場合など観測値の総数は膨大な数になることがある。このような大規模データに対しても迅速に効率的計算可能な検定統計量を提案する。

(4) サンプル数が増えていくとき統計量の有限分布が漸近分布へ収束する速度が遅い場合、有限分布を近似する computer-intensive な方法として Bootstrap 法がある。これは観測値をランダムに取り出しシミュレーションを行う方法である。定常過程に対しては既に周波数領域において、離散フーリエ変換やペリオドグラムを用いた Bootstrap 法が提案され、その理論的正当性も保証されている。可能ならばこれらの結果が定常確率場においても成立するか否かを明らかにする。

(5) また非定常確率場の代表的なモデルとして固有定常確率場がある。これは異なった 2 地点・時点で観測された値の差分が定常確率場になる確率場である。固有定常確率場に対するパラメトリックモデルも種々提案されているが、パラメータの推定法およびその理論的性質を議論した論文は少ない。固有定常確率場は定常増分を持つ確率過程を確率場に一般化したものである。ある種の定常増分を持つ確率過程についてはペリオドグラムに基づく推定量が一致性をもち極限分布は正規分布にしたがうことが導かれている。可能であればこれらの結果がやはり固有定常確率場において成立するか否かを明らかにする。

3. 研究の方法

(1) 時空間データを解析するための統計モデルは、今までに様々なものが提案されている。その代表的なモデルのひとつであり、実際のデータ解析においても頻繁に応用され

てきたのが時空間定常確率場である。

定常確率場は時系列解析における定常過程の一般化であり、各地点・各時点における観測値の期待値が変化せず一定の値をとり、また異なった地点・時点における観測値間の共分散が地点・時点をベクトルに表現したとき、そのベクトル差のみの関数になるモデルである。

本研究ではまず時系列解析における代表的な解析手法である観測値の離散フーリエ変換、ピリオドグラムの理論的性質を明らかにする。特に上述のように観測地点・時点が固定されておらずランダムな確率変数に従う場合について議論する。この場合理論的性質の導出は観測地点・時点が固定されている場合に比べ格段に難しくなる。たとえば定常確率場の同時確率分布が多変量正規分布にしたがう正規定常確率場であっても、観測地点・時点がランダムになるともはや観測値は正規分布にしたがわず、統計量・推定量のモーメントの計算などが格段に複雑になる。このような状況の下で、離散フーリエ変換、ピリオドグラムがどのような性質をもつか明らかにする。

(2)次に定常確率場に対するパラメトリックモデルの検定にピリオドグラムを用いた検定統計量を提案し、(1)で導出した結果に基づき、検定統計量の漸近的性質を明らかにする。漸近理論の枠組みとしては、観測値が得られる領域が無限大に発散すると同時に隣接する観測地点・時点間の距離が狭まっていく混合漸近理論(Mixed Asymptotics)を採用する。

(3)離散フーリエ変換やピリオドグラムを用いた Bootstrap 法を提案し、その漸近的性質を明らかにする。

(4)離散フーリエ変換やピリオドグラムを用いて、固有定常確率場に対するパラメトリックモデルを規定するパラメータの推定法を提案しその漸近的性質を導く。

4. 研究成果

(1)異なったフーリエ周波数における離散フーリエ変換は、観測地点・時点が互いに独立で同一な一様分布にしたがってランダムに選択される場合、混合漸近理論のもとでは無相関になることを導いた。これは定常過程の場合かつ観測時点が等間隔に並んでいる場合の一般化が成立することを意味する。

しかし定常過程との違いは、フーリエ周波数が定常確率場はベクトルになるので、異なるベクトルでも異なる成分の個数に依存し、異なる成分の個数が多いほど共分散が0へ収束する速度が迅速であることを明らかにした。

ピリオドグラムは離散フーリエ変換の絶対値の2乗であるから同様の性質をみたく。

(2)上記(1)の結果に基づき、定常確率場に対するパラメトリックモデルを検定するための新たな検定統計量を提案し、その漸近

的性質をいくつか導いた。アイデアはまずピリオドグラムを、カーネル関数を用いて平滑化し、各周波数におけるスペクトル密度関数の一致推定量を構成する。次に単純帰無仮説の下では真のスペクトル密度関数、複合帰無仮説の下では想定したパラメトリックモデルのパラメータ推定量を代入したスペクトル密度関数各々と上述の一致推定量との差の2乗をある領域に属するフーリエ周波数すべてに渡って足し合わせたものを検定統計量とする。この統計量が小さい値を取る時は帰無仮説を棄却せず、逆に大きい時は棄却する。

検定統計量を構成する際のひとつの工夫は、検定統計量を観測値の測定単位に依存せず尺度不変にするために、単純帰無仮説の下では真のスペクトル密度関数、複合帰無仮説の下では想定したパラメトリックモデルのパラメータ推定量を代入したスペクトル密度関数の値で差の2乗を除すことである。

その結果帰無仮説の下で、検定統計量の漸近的期待値と分散は、未知の量には異存せずカーネル関数の多重積分により簡潔に表現できることが明らかとなった。したがって大規模なデータに対しても迅速に計算可能であり、実用上も有用である。

(3)帰無仮説の下で、検定統計量の3次以上の高次キュムラントがサンプル数の増加とともに0へ収束すれば、その極限分布は正規分布になる。現在漸近期待値、分散を求めたのと同じ方法でそれを示すべく計算中である。

(4)最後に研究目的・方法で述べた当初の目標まで到達しなかったが、(1),(2)において導出した結果より、以下の問題について今後の展望について述べる。

本研究では観測地点・時点は一様分布に従うと仮定したが、さらに一般の確率分布関数にしたがう場合を考える必要がある。確率分布関数が既知の場合にはその密度関数で観測値を除したとき一様分布と同じ結果が成立する。しかし未知の場合は密度関数の推定量で除した場合、同様の結果が成立するか明らかにしなければならない。

検定統計量の有限分布が極限分布へ収束する速度が遅い場合、極限分布で近似する代替的な手法として Bootstrap 法がある。定常過程に対しては周波数領域における Bootstrap 法が有効であることが理論的に示されている。その際に本質的な性質は互いに異なるフーリエ周波数対するピリオドグラムが漸近的に無相関になることである。(1)で述べたように、本研究の理論的枠組みの中でも同様の性質が成立する。したがって定常過程において同様に Bootstrap 法が有効であることが期待できる。

パラメータが1次元の場合、固有定常確率場は増分が定常となる確率過程である。定常過程のパラメトリックモデルに対する推定方法として Whittle 法がある。これは定常

過程が Gauss 過程の場合の最尤推定法をピリオドグラムによって近似した推定方法である。

この推定法は漸近的には最尤推定法と同じ分散を持つ漸近有効な推定法である。さらにこの推定方法は定常増分をもつ確率過程のパラメータ推定に用いても、ある仮定の下で一致性をもちかつ極限分布が正規分布になることが導かれている。この場合も述べた異なるフーリエ周波数に対するピリオドグラムが漸近的に無相関になることが本質的である。したがって固有定常確率場のパラメータ推定においても、Whittle 法は一致性をもち極限分布は正規分布になる推定法であることが期待できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者は下線)

[学会発表](計 3 件)

YAJIMA Yoshihiro, On a discrete Fourier transform of irregularly spaced spatial data and its applications. High Dimensional Statistical Analysis and Quantile Analysis of Time Series.

熊本大学(熊本県熊本市) 2016.03.04

YAJIMA Yoshihiro, On discrete Fourier transforms of irregularly spaced spatial data and their applications. New Developments on Econometrics and Economic Finance. 東京大学(東京都文京区) 2016.01.09

YAJIMA Yoshihiro, A test statistic of irregularly spaced spatial data based on the discrete Fourier transform of observations. Recent Progress in Time Series and Related Fields. 東北大学(宮城県仙台市) 2015.12.11

6. 研究組織

(1)研究代表者

矢島 美寛 (YAJIMA, Yoshihiro)

東京大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号: 70134814