

平成 30 年 6 月 25 日現在

機関番号：17701

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K12111

研究課題名(和文) 摂動理論に基づいたマルチプレックス系における動的過程の解析理論の開発

研究課題名(英文) Analytical methods for dynamical processes on multiplex networks based on perturbation theory

研究代表者

秦 重史 (HATA, Shigefumi)

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号：70735927

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、多層性を持つネットワーク(マルチプレックスネットワーク)上における反応拡散過程を扱った。特に、系の一様状態の不安定化とそれに伴って形成される自己組織化的パターンの性質を解析するための手法を考案し、同手法を用いた動的過程の解析を通して、マルチプレックスネットワーク上におけるパターン形成ダイナミクスの普遍的な性質の探求・解明に取り組んだ。研究期間中、マルチプレックスネットワーク上における一様状態の線形安定性を近似評価する手法の構築、ラプラス固有ベクトルが持つ局在性に関する理論解析などを行なった。

研究成果の概要(英文)：In this project, diffusion-induced instability and pattern formation dynamics in reaction-diffusion systems on multiplex networks have been studied. During the project period, an analytical method evaluating linear stability of the uniform state in multiplex networks has been developed. A theoretical framework accounting for the localization of the Laplacian eigenvectors on random networks has been proposed.

研究分野：非線形物理学

キーワード：複雑ネットワーク パターン形成

1. 研究開始当初の背景

近年、ネットワーク上における動的過程の研究が精力的に行われている。特に、複数の反応因子がネットワーク上を移動する過程は、交通網を介した感染症の蔓延、生物種が生息域で織りなす捕食・被捕食ダイナミクス、細胞網における化学反応などを記述する手段として様々な分野で重宝されている [Othmer 1971, Vespignani 2008, Nakao 2010]。研究代表者はこれまでに、生態系の文脈においてネットワーク上における振動性不安定化の解析 [S. Hata, H. Nakao and A. S. Mikhailov, *Sci. Reps.* (2014)], および、ネットワーク上における移流輸送を記述するための方程式の定式化を行った [S. Hata, H. Nakao and A. S. Mikhailov, *Phys. Rev. E* (2014)].

さて、実世界には、ある種の多層性を持つネットワークが広く存在する。すなわち、異なる結合トポロジーを持つ複数のネットワークが同一のノードを共有する系である (図 1)。例えば交通網を想像していただければ良い。航空網と鉄道網はどちらも都市 (ノード) を結ぶネットワークであるが、異なる経路 (結合トポロジー) を持つ。また生態系においては複数の生物種が同一の生息域 (ノード) に共存するが、生息域間の移動経路 (結合トポロジー) は生物種によって異なる。マルチプレックス性と呼ばれるこの性質は、上述の通り交通網のような人工的なネットワークや、生態系の“経路”が構成するネットワークにおいて広く見られる。このため、その上における動的過程の解明は実世界のマルチプレックス系を理解する上で重要である [Lee 2012]。しかしながら、マルチプレックス系に適用可能な解析理論は少なく、数値実験が主な研究手段となっている。

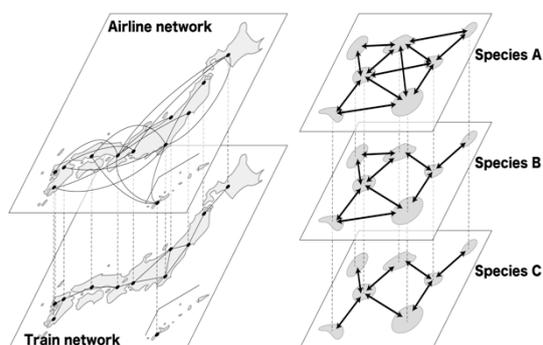


図 1 : マルチプレックスネットワークの例

2. 研究の目的

本計画の目的は、マルチプレックスネットワーク上の動的過程に適用可能な解析理論の構築である。マルチプレックスネットワーク上の動的過程に対しては、しばしば、従来の (つまり単層の) ネットワークに関

する研究において重宝されてきた解析理論を適用することができない。そこで本計画では、マルチプレックス系に適用可能な解析手法の構築を目的とした。また、構築した手法を用いた解析を通して、マルチプレックスネットワーク上における動的過程、特に、反応因子の移動に誘起される系の不安定化、およびそれに伴うパターン形成ダイナミクスに関する、新たな知見の獲得を目的とした。

3. 研究の方法

本研究では、複数の反応因子がマルチプレックスネットワーク上を移動する系を考える。特に、それぞれの反応因子が異なる層のネットワーク上を移動し、共有されるノードにおいて反応する状況を数理モデル化する。本研究では、この数理モデルの理論解析を通して、マルチプレックスネットワーク上における動的過程を解析するための手法を構築する。また、上式の数値実験を計算機上で行い、構築した理論の検証を行う。以下に具体的な研究のテーマを記す。

(1) マルチプレックスネットワーク上において系の安定性を評価する手法を構築する。反応因子が媒質上を移動することで、系の一樣状態が不安定化を起こすことが知られている。因子の反応・移動の様式によって、様々な種類の不安定化が起こり得るが、単層ネットワークにおいては、これまでに、Turing 不安定化 [Nakao 2010, Hata 2014, Asllani 2014] や Benjamin-Fair 不安定化 [Nakao 2009] といった、拡散誘起不安定化が起こることが報告されている。Turing 型の不安定化はマルチプレックスネットワーク上でも起こり得ることが、数値実験を通して確認できる。

単層ネットワークにおいて、これらの安定性を評価する手法として、線形安定性解析が重宝される。しかしながら、マルチプレックスネットワーク上の動的過程に対しては、従来の線形安定性解析を適用することができない。そこで本テーマでは、マルチプレックスネットワーク上の動的過程に対して適用できる安定性解析の方法を構築する。また、構築した理論を典型的なマルチプレックス系に適用することで、不安定化がおこるための条件の同定を行う。さらに、数値実験を通して、同定した条件の妥当性を検証する。

(2) 一樣状態が不安定になることで、系の状態は不均一になる。例えば色素が不均一に分布すると色の濃い場所と薄い場所ができ、結果的に媒質には模様が生じる。この模様をパターンと呼ぶ。本テーマでは (a) で同定した不安定化に伴いマルチプレックスネットワーク上に形成されるパターンが持つ性質を調べる。

前述のとおり、マルチプレックスネットワーク上で確認できる Turing 不安定化は、単層ネットワークでも起こり得る。この意味においてこれはマルチプレックスネットワーク特有の性質が引き起こすものではないと考えられる。本研究では、特に、(単層ネットワーク上では起こらない) マルチプレックスネットワーク特有の不安定化・パターン形成過程の発見を目指す。

4. 研究成果

(1) 近似的な線形安定性解析を通じた不安定化条件の同定

前述の通り、マルチプレックスネットワーク上の動的過程に対しては、従来の線形安定性解析を適用することができない。これは、各層における因子の移動を記述する行列が、それぞれ異なる固有ベクトルを持つことに起因する。

そこで研究代表者は、これらの行列が同一の固有ベクトルを持つように系を近似し、この近似系において線形安定性解析を行う手法を考案した。また、この近似的な線形安定性解析により導かれる不安定化の条件が、数値実験の結果とよく一致することから、手法の有効性・近似の妥当性を確認した(発表論文[3], Figure 3)。さらに、解析結果から、マルチプレックス系において Turing 型の不安定化が起こるための条件には、各反応因子の移動速度、および、共有されるノードが各層においてもつリンクの数が大きく寄与することを明らかにした。

上記の安定性解析法は摂動の最低次において、単層ネットワークにおける安定性評価手法である single-differentiated-node (SDN) method [Wolfrum 2013] に等しくなる。この意味において、本手法は SDN method の数学的な裏付けを与えるものであると言える。また、高次の摂動を取り入れることにより、評価の精度を高めることができる点から、本手法は SDN method の一般化の一つであると言える。

(2) ラプラス固有ベクトルが持つ局在性の理論的説明

Turing 型の不安定化が起こった直後、系には、ラプラス行列の固有ベクトルで記述されるパターンが生じる。よって、ラプラス固有ベクトルの解析を通して、系に現れるパターンが持つ性質を理解することができると考えられる。ランダムネットワークのラプラス固有ベクトルが持つ性質の一つとして、固有ベクトルがネットワーク内の一部のノードでのみ大きな値を持つこと(局在性)が数値的に報告されている [Nakao 2010]。しかしながら、ラプラス固有ベクトルは、必ずしも全てのネットワークで局在性を持つわけではない。例えば、単純格子においては局在性

を持たない。このため、どのような種類のネットワークにおいてラプラス固有ベクトルが局在性を持つか明らかではない。また、ラプラス固有ベクトルは一般に解析的に計算することができないことから、局在性に関する理論的な裏付けは、これまでに報告されていない。

そこで研究代表者は、摂動理論に基づいて、ラプラス固有ベクトルの近似評価を行った。結果、近似計算の結果が、実際の(数値計算により得られる)固有ベクトルを良く記述できることを確認した(発表論文[1], Figure 3)。また、この近似手法に基づいた解析を通して、ラプラス固有ベクトルの局在性は、ネットワークを構成するノードが持つリンクの数の不均一性に大きく起因することを明らかにした。

また、同様の手法を、移流により因子が輸送されるネットワークに適用することで、各ノードにおける移流強度が不均一な場合に、移流行列の固有ベクトルに局在性が生じることを明らかにした(発表論文[2], Figure 2)。

(3) マルチプレックスネットワークに特有のパターン形成の発見

過去に報告されたネットワーク上に形成されるパターンは、Turing pattern に代表されるように、そのほとんどが大域的である。すなわち、ネットワーク全体にパターンが生じる。研究代表者は数値実験を通して、ある種のマルチプレックスネットワーク上において局所的なパターンが生じ得ることを発見した。このパターンはこれまでに研究されてきた単層ネットワーク上では形成されない、マルチプレックスネットワーク特有のものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

[2]は国際会議プロシーディングス。

[1] Shigefumi Hata and Hiroya Nakao. “Localization of Laplacian eigenvectors on random networks”, *Scientific Reports* 7, 1121 (2017). 査読あり。

[2] Shigefumi Hata. “Localization of advection eigenvectors on flow networks”, *Proceedings of 2015 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications* 1, 660(1-4) (2015). 査読あり。

- [3] Nikos E. Kouvaris, Shigefumi Hata and Albert Díaz-Guilera, “Pattern formation on multiplex networks”, Scientific Reports 5, 10840 (2015). 査読あり.

〔学会発表〕(計 11 件)

[1]はポスター発表, その他は全て口頭発表.

- [1] Shigefumi Hata and Hiroya Nakao. “Localization of Laplacian eigenvectors on random networks”, Dynamics Days 2018, 2018.
- [2] 迫田和之, 秦浩起, 秦重史. “カオス符号化を用いた大規模 MIMO における Belief Propagation 法による複合化の特性評価”, 無線通信システム研究会, 2017 年.
- [3] Shigefumi Hata. “Localization of Laplacian eigenvectors on random networks”, DDAP9, 2016.
- [4] Shigefumi Hata. “Localization of Laplacian eigenvectors on random networks”, WS : Interdisciplinary Applications of Nonlinear Science, 2016.
- [5] 秦重史. “ネットワーク上のチューリング不安定化とその周辺”, RIMS 研究会: 集団ダイナミクスに現れる時空間パターンの数理, 2016 年.
- [6] 秦重史, 中尾裕也. “ネットワークラプラス行列の固有ベクトルが示す局在性の理論的説明”, 日本物理学会 2016 年秋季大会, 2016 年.
- [7] 秦重史. “ネットワーク上の多変数反応拡散系におけるパターン形成”, ミニワークショップ: 多変数反応拡散系の数理とその周辺, 2015 年.
- [8] Shigefumi Hata. “Localization of advection eigenvectors in flow networks”, International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, 2015.
- [9] 秦重史, 中尾裕也, Alexander S. Mikhailov. “複雑ネットワーク上の移流による混合過程の解析”, 日本物理学会 2015 年秋季大会, 2015 年.

- [10] Shigefumi Hata, Hiroya Nakao and Alexander S. Mikhailov. “Advection equation for network-organized systems”, Dynamics Days EU, 2015.

- [11] Shigefumi Hata, Hiroya Nakao and Alexander S. Mikhailov. “Feedback control of Turing instabilities in activator-inhibitor networks”, Mini workshop on nonlinear dynamical systems and control, 2015.

〔その他〕

ホームページ等

<http://sci.kagoshima-u.ac.jp/hata/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

秦 重史 (HATA, Shigefumi)

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号 : 70735927