

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：13401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13234

研究課題名(和文) 中学校数学の学習過程における「順序思考」・「俯瞰思考」の役割とその活用

研究課題名(英文) Role of "worm's eye view thinking" and "bird's eye thinking" in the learning process of junior high school mathematics, and its application

研究代表者

風間 喜美江 (KAZAMA, Kimie)

福井大学・学術研究院教育・人文社会系部門(教員養成)・特命教授

研究者番号：00552374

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、2つの視点「順序思考」と「俯瞰思考」を取り上げ、中学校数学学習指導の改善策をこの2視点に帰着させ、これを研究目的とする。ア「順序思考」「俯瞰思考」の視点に関する数学の指導内容の体系的分析と指導提案 イ生徒の「順序思考」「俯瞰思考」に関する受容とその発達のための数学教材開発

研究は次の～の順に行い、ア、イに関した成果が得られた。数学教育、心理・特別支援に関する文献研究と考察 数学の学習内容に関する「順序思考」「俯瞰思考」の分類、系統性等の考察 数学の「順序思考」「俯瞰思考」に関する生徒の実態調査問題の作成と実施・分析 教材開発 指導実践 教材開発の妥当性とまとめ

研究成果の概要(英文)：We take two viewpoints of "worm's eye view thinking" and "bird's eye view thinking" to make improvement measures of middle school mathematics teaching guidance by using the two viewpoints, and this research has the following two aims. ( ) Systematic analysis of mathematical guidance from the two viewpoints, and our teaching suggestion by its analysis. ( ) Students' acceptance of the two viewpoints, and development of mathematics teaching materials for it.

The research was conducted in the order of 1 to 6. 1.Reference research on mathematics education and psychological / special support 2.Classification of the two viewpoints on mathematical learning contents, and discussion on the systematical ordering 3.Making of survey questionnaires on the two viewpoints in mathematics, and these implementation and analysis 4.Teaching material development 5.Teaching practice 6. Validity of the teaching material development and summary

研究分野：数学教育学

キーワード：授業改善 教材開発 大局的な視点 順序思考 俯瞰思考 数学的な見方や考え方

## 1. 研究開始当初の背景

数学の見方や考え方の研究は片桐重男<sup>1)</sup>に代表され、それは「帰納、演繹、類推、抽象、一般化、特殊化・・・」などの細かな分類に基づく考察と指導の具体化であった。しかし、指導の実態は細分化された視点での育成に終始し、それら視点の根底にある大局的な視点が欠落していた。それは多数の研究授業参観や授業研究会で、観点別評価等を中心とした細かな追究ばかりを、申請者が目の当たりにした実感である。生徒もまた多種の数学問題の対処に目がいき、数学の根底に流れる思考の特性を捉えられず、困難を克服できていない<sup>2)</sup>。

数学学習を大局的な視点で捉え、その根幹となる新たな指導原理を追究する必要がある。数学の思考の特性を下記**(1)(2)(3)**のように多角的に分析した結果、いろいろな数学の見方や考え方の根底にある大局的な視点として、次の意味する「順序思考」と「俯瞰思考」の2つに帰着できると考えた。

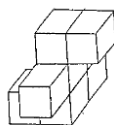
- ・時間的・段階的・順序的・言語的・分析的などの順序系列をもってする思考を「順序思考」と呼ぶ。
- ・空間的・総合的・関係的・俯瞰的など、全体を見て相互の関連づけをする思考を「俯瞰思考」と呼ぶ。

**(1)特別支援教育:** 特別支援教育の場では、「継次的処理」「同時的処理」の視点で児童・生徒の認知の特徴を捉え支援に活かす研究がある<sup>3)</sup>。音声言語による説明と視覚的な過程を積み重ねて知識を習得させる継次処理型指導、全体を踏まえ本質的部分を含む課題の提示と全体と部分の関連性を重視して知識を習得させる同時的処理型指導である。「継次的処理」と「同時的処理」は「順序思考」と「俯瞰思考」に匹敵し、同じような意味を込めて教育に活かしている。通常学校でも児童・生徒の認知的個性に応じてこの2つの指導の型は学習に有効に働くだろうと示唆を得た。

**(2)数学教育研究:** 立体の2次元表示に関し下の問題で実施した研究<sup>4)</sup>がある。児童・生徒の回答には、「構成描写」(積み木の順次の組み立て方をかく)と「状態描写」(全体の見取図等をかく)の2つの回答があり、学年進行でその描写の占める割合に変化があることが示されている。「構成描写」と「状態描写」は上記の「順序思考」と「俯瞰思考」に匹敵し同じ意味があり、児童・生徒が受容する思考や表現がこの2つに大別できることがわかる。

(立方体を組み合わせた右図の模型を与え)

この立体を紙にかき、クラスの人に伝えください。伝え方は自由ですが、クラスの人が見て、この立体を積み木でつくることできるように伝えてください。



**(3)高校・大学数学教育からの示唆: 概念定義**

を順序的、俯瞰的の2通りで与える試みの成果が見られた。<sup>5)</sup>

算数・数学の学習内容・学習方法の特性から小学校は「順序思考」の、高等学校は「俯瞰思考」の占める割合が多い。

## 2. 研究の目的

小学校は「順序思考」の、高等学校は「俯瞰思考」の占める割合が多いことから、本研究は小・高を接続する中学校に焦点化した。

中学校数学の学習の困難性が指摘され、その改善が叫ばれている。学習指導の改善を図るには根底に流れる数学の見方や考え方の特性の考察も不可欠である。数学の見方や考え方の特性を大別する視点のなかから、2つの視点「順序思考」と「俯瞰思考」とを本研究では取り挙げる。中学校数学学習指導の改善策をこの2つの思考に帰着させることを求め、本研究は次のア、イを研究目的とする。

ア. 「順序思考」と「俯瞰思考」の視点に関する数学の指導内容の体系的分析と指導提案

イ. 生徒の「順序思考」と「俯瞰思考」に関する受容とその発達のための数学教材開発

## 3. 研究の方法

研究は主に、次の(A)～(C)の枠組みと方法をとる**2ア、イ**に即した成果を明らかにし、中学校数学の学習過程における「順序思考」・「俯瞰思考」の役割を明らかにし、教材開発の妥当性と指導法の改善の具体化について明らかにする。

- (A) 数学の「順序思考」・「俯瞰思考」に関する生徒の実態調査問題の作成と実施・分析
- (B) 先行研究調査と 数学の学習内容に関する「順序思考」・「俯瞰思考」の分類、系統性等の考察
- (C) 教材開発と指導実践

## 4. 研究成果

研究方法3(A)～(C)に沿って、成果を述べるが、それ以上の成果(D)も付記する。

### (A) 数学の「順序思考」・「俯瞰思考」に関する生徒の実態

本研究で取り上げる2つの視点「順序思考」と「俯瞰思考」は、筆者らが何度もの修正を加えながら作り出した新しい言葉である。教材開発・授業改善のための研究に関する新しい発想は、教材開発・授業改善のため新しい発想での新しい研究といえる。そこで、次の①～③から「順序思考」・「俯瞰思考」についての生徒の実態を明らかにすることにした。

#### ①調査のねらい

情報(文章)から条件を読み取り、説明内容または結論づけたことについて、中学生の判断・説明から順序思考または俯瞰思考の視点からその存在・実態を明らかにする。

#### ②調査問題 設問1, 設問2(略)

－設問 1－

図1は、あるロボットがAの位置から出発して、Pの位置にたどり着くまでの動きを示したものです。

このロボットのCからPまでの動きを、言葉でわかりやすく説明してください。ただし、あなたの説明を読む人はA～Cまでのロボットの動きの図2しかもっていないものとします。

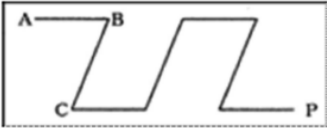
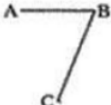



図1

図2

③調査対象・時期・時間

- ・国立大学附属中学校第1～3学年各1クラス、各クラス40名計120名
- ・平成27年12月
- ・30分

④調査分析の方法

生徒の回答の反応について、明らかになった観点を見だし、その観点にしたがい分析をした。

⑤調査結果と考察

詳細な調査結果と分析は省略する。

この調査結果から、次のことがいえる。

- ア. 生徒の思考について、2視点「順序思考」「俯瞰思考」が明らかに存在すること
- イ. 「順序思考」「俯瞰思考」の様相の明確なタイプが存在すること
- ウ. 異なる問題で、同じ思考タイプを示す生徒と異なる思考タイプを示す生徒がいること
- これらを踏まえ、次のことがあげられた。
- ・教材開発の提言として、2視点「順序思考」「俯瞰思考」が可能であり、なおかつ他の思考を誘うような教材の開発を行う。
  - ・授業改善の提言として、2視点「順序思考」「俯瞰思考」による改善を行う。
- 例えば、授業で取り扱う問題に対する生徒の視点による回答から、問題や回答をこの2視点で捉え直すことで、異なる視点への移行を経験させる。
- ・領域により生徒は異なる思考をするかどうかについて、その傾向をさぐる。

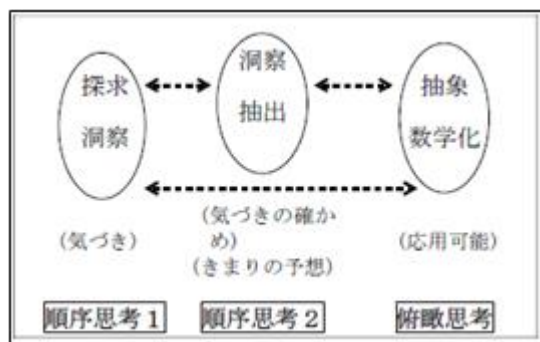
(B) 先行研究調査と 数学の学習内容に関する「順序思考」・「俯瞰思考」の分類、系統性等の考察

数学教育の先行研究にあたったが、特別支援教育他2件以外は、不幸にしてなかった。

(A)の結果・考察を踏まえ、授業観察を

(B)行い、授業改善には、ひとつの授業には図Aのような段階や流れがその役割を果たすことに至った。

図Aの内容について、まず、2つの思考がもつ主な特性を列挙する。



図A:活動内容と順序・俯瞰思考のイメージ

○順序思考

生徒にとって具体的な数学的事象(数学科として考察の対象になり得る内容をもつ事象)が思考の対象となる。

- ・気づき・発見を促す(教師の工夫が求められる)。
- ・個々の数学的事象に当たる探求活動。
- ・対象の具体性によって、思考活動の意義意味を生徒が得ることができる。

○俯瞰思考

- ・事象全体から数学的エッセンスを抽出する。
- ・数学的エッセンスを抽出するには洞察が必要となる(教師の工夫が求められる)。
- ・エッセンスを抽象することができる(核心をつかむ)と、それを他の事象に応用できる。

そして、2つの思考は双方向的でもある。すなわち、順序思考が俯瞰思考を導き、俯瞰思考の結果の確実性を与えることができる。また、俯瞰思考を順序思考の中で使うことによって順序思考の発展、拡張を可能にすることができる。

では、実際の授業の中で想定される、図Aで示された2つの思考の展開を示してみよう。

- ① 授業の導入段階で、生徒が自分なりの身近な課題として捉えるためには、具体的な数学的事象を探求する活動(順序思考1:結果を予想する)が必要である。
- ② 探求は洞察により変容することがなければ抽象、数学化へは近づかない。外見は順序思考1と同質の活動に見えるが、探求の段階を変容させる抽出をする活動(順序思考2:結果の背景にある決まりを洞察する)が必要となる。

③ 俯瞰思考によって抽出された事柄を、数学的表現方法によって形式化する。

④ 俯瞰思考の結果を順序思考の中で適用することによって、俯瞰思考の修正と確認を行う。

【実際の授業と図Aの対比】

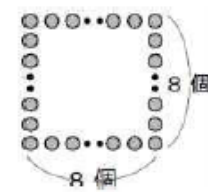
通常の授業と図Aを対比させてみるため、中1「文字と式の利用」の授業観察を行った。生徒の反応やグループの活動の様子から、習熟した文字概念の獲得をしている生徒が多いとはいえなかった。

そこで、図Aに照らしてみると、順序思考

2が必要であると判断でき、指導の改善として、次の②を挿入することを提案することができる。

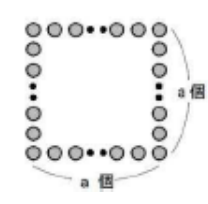
- ① [問題1] 順序思考1  
 ② [問題1]' 順序思考2 ←挿入  
 ③ [問題2] 俯瞰思考

[問題1]'  
 1辺が8個の正方形をつくと、マグネットは全体で何個必要ですか。



(1辺5個の正方形をつくる[問題1]は略)  
 具体的には、次の[問題1]'のような問題を[問題2]の前に取り入れ、活動を促すという提案である。

[問題2]  
 右の図のように、マグネットを正方形の形に並べます。1辺に並ぶマグネットの数がa個のとき、全体の個数をaを使った式で表すことを考えましょう。



この問題に関する活動は、[問題1]の1辺5個を8個に変えることだけに止まらず、具体である図から半具体として、[問題1]'の図があり、抽象度を上げ活動することになる。[問題1]の既知の探求の方法や知識を用い、それと[問題1]'に共通する構造の探求と決まりの予想ができ、図の「・」の意味が鮮明になり、文字aの意味の理解に繋がっていくと考える。また、生徒の実態によりさらなる活動[問題1]'もあり、指導者は図Aのイメージでその指導が必要か否かを、即決することができよう。実際に、②の挿入の改善提案を受け、この直後に、同じ学校・指導者で授業実施をしたところ、生徒の学習の困難性が緩和され[問題2]の活動がスムーズになったことが報告された。

### (C) 教材開発と指導実践

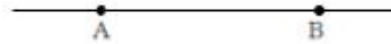
教材開発・指導実践は、主に次の内容で行った。

- ① 中1 ・三角形の面積  
 ② 中1 ・正四角錐における2頂点間の最短能道のり  
 ③ 中2 ・空間図形における投影的な見方や考え方

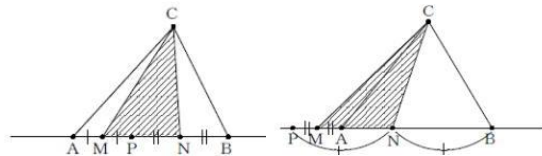
[具体例] 「①中1 三角形の面積」  
 (②, ③は略)

プレテストを実施し、生徒の実態を明らかにしてから下記の流れで授業実施を行った。プレテストでは、三角形の面積に関して個々の面積は求められるが、その面積公式が底辺・高さ・面積の関係を表すことが掴めていないことが明らかになった。

[問題] 1つの直線上に2点A, Bがあり、直線AB上にない点Cがある。直線AB上にかつてな点Pをとり、PAの中点をM, PBの中点をNとする。このとき、 $\triangle CMN$ と $\triangle CAB$ の面積について、どんなことがいえますか。



- 1)  $\triangle CAB$ の面積は、 $\triangle CMN$ の面積の2倍になっていることを調べる。



- 2) 理由を説明する。

面積＝底辺×高さ÷2の関係に着目するがどう説明してよいかわからない生徒が多い。

そこで、具体的な数値から、

$$\frac{1}{2} \left( \begin{array}{l} 8 \\ 4 \end{array} \right) \times 5 \div 2 = \begin{array}{l} 20 \\ 10 \end{array} \leftarrow 1/2$$

の式を関係概念としてとらえ、点Pがいろいろな位置にあっても、「 $\triangle CMN$ の面積は、 $\triangle CAB$ の面積の1/2である」ことがいえるか考えることができた。

この授業は中1には難易度が高い。それは、点Pが辺BC上にない場合も $\triangle CMN$ 面積が $\triangle ABC$ の1/2である理由を考えさせ、しかもその説明内容が場面で異なるからである。具体的な場面の把握とそれに対応した図を見出す、図Aの順序思考1の活動である。

理由を考える活動では、すぐに俯瞰思考にいく生徒は少数である。そこで教師は、計画的に順序思考2を取り入れた指導を行った。それが2)の具体的な関係概念を把握する式である。生徒にとって、それまでの面積の値を求める式から、関係を捉える式へと式の見方を変える瞬間となる。この捉え方の変更により、考え方の理解に近づくことになっていく過程が見えてきた。学習の困難な内容を順序思考1, 順序思考2, 俯瞰思考を段階を追った教師の意図的な発問が有効に働いたと考えられた。

### (D) その他

・数学論文において、佐竹郁夫が「順序思考」・「俯瞰思考」の有効な働きにより、論文「FROBENIUS STRUCTURES AND CHARACTERS OF AFFINE LIE ALGEBRAS」をまとめることができた。

・中学校生徒の数学との様々な向き合い方について、数値化し分析することができた。そ

れにより、中学校生徒の数学理解は、教員が授業などで接している際の、生徒の数学の向き合い方が影響を及ぼしていることが指摘できた。

#### [全体を通して]

授業原理「順序思考1：探求・洞察の段階」「順序思考2：洞察・抽出(気づきの確かめ、きまりの予想)」「俯瞰思考：抽象・数学化」とに基づき、授業実践を行った。(例)「空間図形における投影的な見方や考え方」では、与えられた立体のいろいろな見方から問題を考える(順序思考)だけでなく、与えられた投影図から多様な立体を想定・検討する(俯瞰思考)ことも大切であることを取り上げ、ポリキューブを用いた空間図形の授業実践を、順序・俯瞰思考の視点をもって、指導法の研究を行った。結果として、相手に伝える活動では言語化・記号化による一般的表現への生徒の意識化と、まとめでは物に頼らない念頭操作による凝縮した思考とが、できた。

これらの授業の生徒の授業観察やポストテストの反応・分析から、授業原理「順序思考1・2」「俯瞰思考」の視点への教師の意図的な指導をすることが生徒の意識の流れを高め、効果的な指導に繋がることが明らかになった。また、各分野の教材開発や授業実施においても同様なことがいえ、生徒の意識の流れを高めることが明らかになった。

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計6件)

- ① 佐竹郁夫・渡辺宏司・大西光宏・大前和弘・筒井智, 中学生生徒の数学との様々な向き合い方, 香川大学教育実践総合研究第36号, 2018. 3, pp. 41-46 [査読有]
- ② 佐竹郁夫, FROBENIUS STRUCTURES AND CHARACTERS OF AFFINE LIE ALGEBRAS, Osaka Journal of Mathematics, 2017. 8, pp. 1-35 [査読有]
- ③ 風間喜美江, 視点「順序思考」・「俯瞰1思考」からの授業の改善—中学校の三角形の面積指導—, 第50回秋期研究大会発表収録(日本数学教育学会), 2017. 11, pp. 51-54 [査読有]
- ④ 風間喜美江, 視点「順序思考」・「俯瞰思考」からの指導法の改善, 第49回秋期研究大会発表収録(日本数学教育学会), 2016. 10, pp. 43-46 [査読有]
- ⑤ 佐竹郁夫・大前和弘・大西光宏・風間喜美江, 数学科授業研究における順序思考・俯瞰思考の役割, 香川大学教育実践総合研究第33号, 2016. 9, pp. 113-123 [査読有]
- ⑥ 佐竹郁夫・香川大学教育学部附属坂出中学校数学科, 中学校数学科における順序思考・俯瞰思考の役割, 香川大学教育学部・附属教育実践センターニュース, 2016. 4, p. 2 [査読無]

[学会発表] (計5件)

- ① 佐竹郁夫・香川大学教育学部附属坂出中

学校数学科, 中学校数学科における順序思考・俯瞰思考の役割, 第17回香川大学教育学部附属学校園教員合同研究集会. 香川大学教育学部(香川県・高松市), 2017. 2. 27

② 風間喜美江, 三角形の面積に関する小・中の指導の系統性—「順序思考・俯瞰思考」の視点を通して—, 第61回近畿数学教育学会例会発表会, 同志社大学(京都府・京都市), 2017. 2. 18

③ 風間喜美江, 視点「順序思考」・「俯瞰思考」からの指導法の改善, 第49回秋期研究大会(日本数学教育学会), 弘前大学(青森県・弘前市), 2016. 10. 27

④ 佐竹郁夫・大前和弘・大西光宏・蔵本愛里, 数学科授業研究における順序思考・俯瞰思考の役割, 第16回香川大学教育学部附属学校園教員合同研究集会. 香川大学教育学部(香川県・高松市), 2016. 3. 1

⑤ 風間喜美江・佐竹郁夫, 中学校数学における生徒の「順序思考」・「俯瞰思考」の様相, 第59回近畿数学教育学会例会, 奈良教育大学(奈良県・奈良市), 2016. 2. 20

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

なし

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

風間 喜美江 (Kimie KAZAMA)

福井大学・学術研究院教育・人文社会系部門(教員養成)・特命教授

研究者番号: 00552374

(2) 研究分担者

・橋本 是浩 (Yoshihiro HASHIMOTO)

大阪教育大学・教育学部・名誉教授

研究者番号: 00030479

・佐竹 郁夫 (Ikuo SATAKE)

香川大学・教育学部・准教授

研究者番号: 80243161

(3) 連携研究者 なし

(4) 研究協力者

・荊木 聡 (Satoshi IBARAGI)

大阪教育大学附属中学校・教諭

・堀 孝浩 (Takahiro HORI)

東京都立富士高等学校附属中学校・

主幹教諭

#### 【参考文献】

1) 片桐重男(1988), 数学的な考え方の具体化, 明治図書 2) 平成24~26年度全国学力・学習状況調査報告書(小・中 算数・数学), 文部科

学省 3)長谷川順一(2011),算数学習の困難とその指導,特別支援教育コーディネーター,大学教育出版,pp.163-178 4)狭間節子(1991),数学教育における空間図形の二次元表示の役割についての研究,科研研究報告書,pp30-55  
5)本研究の研究分担者の実践