3版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２０ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１３４２３
研究課題名（和文）形式扇理論によるカスプ特異点の研究

研究課題名（英文）Studies on cusp singularities by the theory of formal fans

研究代表者
石田　正典（Masanori, Ishida）

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：３０１２４５４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：　トーリック多様体の理論を用いて記述されるトーリック型カスプ特異点について形式扇の理論の確立に向けて研究を行った．固定形式扇を定義して，これが扇として実現できるための支持関数についての条件を与えた．
土橋宏康によって構成された，例外因子が 4 つの 3 次元トーリック多様体で 48 の通常 4 重点を持つ 4 次元カスプ特異点について，その交叉の仕方を具体的に記述した．
複素解析的孤立特異点として定義されていたトーリック型カスプ特異点とその非特異化が，形式スキームの理論を使うことにより任意の標数の体上の完備局所環とその上の射影スキームとしても定義できることを示した．

研究成果の概要（英文）：For the toric type cusp singularities which are described by the theory of toric varieties, we tried to establish the theory of formal fans. We defined fixed formal fans and found a sufficient condition on a support function so that such a formal fan to be a fan in a classical sense. For a 4-dimensional example of cuspsingularity obtained by Tsuchihashi, we described explicitly the intersections of the four exceptional divisors at 48 ordinary quadruple points. We described toric type cusp singularities and their resolutions, which are originally defined as complex analytic isolated singularities, over a field of any characteristic by using the theory of formal schemes. They are realized as complete local rings and projective schemes over them.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学　代数多様体　トーリック多様体　カスプ特異点　扇　形式スキーム

１．研究開始当初の背景

代数幾何学におけるカスプ特異点は 2 次元ではヒルベルトモジュラー曲面のコンパクト化に現れる楕円型の特異点であり，非特異化の例外曲線は非特異有理代数曲線のサイクルとなる．この場合，例外因子の自己交点数の -1 倍の作る 2 以上の整数の巡回列がこの 2 次元カスプ特異点を決定し，特異点のさまざまな不変量がこの整数列およびそれから作られる連分数で記述されることがヒルツェブルフ，カラス，中村郁らの研究で知られている．

高次元のカスプ特異点は，一般にはアーベル多様体のモジュライや局所対称空間の佐武コンパクト化などに現れる特異点を指すが，孤立特異点としては土橋宏康によるトーリック多様体の理論を用いて定義されたカスプ特異点が 2 次元カスプ特異点の自然な拡張であり，これを本研究の研究対象とした．

階数 r の自由加群を格子点集合として固定した r 次元実空間の有理的凸多面錐の複体としての条件を満たす空でない集合を扇と言い，トーリック多様体はそのような扇に対して定義される．ヒルツェブルフなどによる 2 次元カスプ特異点の非特異化はトーリック多様体の理論を用いて記述できる．つまり，実平面のある非特異無限扇に一つの格子点集合を保つ線形変換で生成される無限巡回群が作用していて，その非特異無限扇に対応する非特異トーリック曲面の開部分集合の無限巡回群による商空間として非特異化が記述できる．土橋はこれを一般化して r > 2 についても台が開凸錐となる無限扇に離散群がうまく作用している場合に，対応する r 次元非特異トーリック多様体の適当な開集合をこの離散群で割れば境界部分を一点に解析的に収縮させることができることを発見した．これが土橋によるカスプ特異点である．考えている実空間の双対空間に双対開凸錐とこれを分割する非特異扇を考えることにより，双対カスプ特異点を定義することもできる．この双対カスプ特異点がその性質において元のカスプ特異点とどのような双対性を持つかに興味が持たれた．

計算機数学と共に発展してきたグレブナー基底理論におけるグレブナー基底とその類似は，多項式環の単項式順序の取り方に依存するが，可能な単項式順序全体に位相を入れて空間と考えることも部分環の有効な研究手段であることが知られている．実際，黒田茂はその位相空間のコンパクト性を用いてある種の不変式環の SAGBI 基底が有限であることの必要十分条件を得ており，また研究代表者はそのような空間がトーリック多様体を定義する扇の，永田雅宜氏が代数多様体の完備可能定理の証明に用いた，ザリスキ・リーマン空間にあたることを示して，一般次元の扇の完備化に応用している．カスプ特異点の場合もこの位相空間を離散群の作用で割ればコンパクトとなると考えられるので，それを示してその局所環の環論的研究への応用が期待できた．

このカスプ特異点については佐武一郎や尾形庄悦により開凸錐の特性関数を用いて定義されたゼータ関数の 0 での値やヒルツェブルフ・リーマン・ロッホの定理を適用する場合に必要となる Todd 種数などの不変量があり，特にゼータ 0 値が双対カスプ特異点の Todd 種数に対応するという双対性定理が奇数次元の場合は尾形により，一般次元では研究代表者により示されている．また 4 次元までぐらいであれば具体例についてゼータ 0 値や Todd 種数を計算機で求めることも可能であり，特殊な例について実際に計算を行っている．

２．研究の目的

トーリック多様体は同じ次元の代数的トーラスが効果的に作用する正規代数多様体である．階数 r の自由加群 N を格子点集合として含む実空間の有理的凸多面錐の複体

としての条件を満たす集まりを扇と言い，トーリック多様体はそのような扇に対して定義される．佐武一郎などによる複素対称空間のコンパクト化に生ずるカスプ特異点の内，トーリック多様体による記述が可能な孤立特異点を，1980 年代に土橋宏康が一般化して土橋カスプ特異点とも呼ばれるトーリック型カスプ特異点を定義した．土橋によるカスプ特異点は複素解析的孤立特異点としてしか定義されていないが，形式扇を考えることにより，すでに十分理論が整備されている形式スキームの理論に結びつけられ，一般標数の体上でカスプ特異点の定義が可能と考えられるのでこれを行う．

カスプ特異点は 2 次元ではヒルベルトモジュラー曲面のコンパクト化に現れる楕円型の特異点であり，非特異化の例外曲線は非特異有理曲線のサイクルとなる．この場合，例外因子の自己交点数の -1 倍の作る 2 以上の整数の巡回列がこの 2 次元カスプ特異点を決定し，特異点のさまざまな不変量がこの整数列およびそれから作られる連分数で記述されることがヒルツェブルフ，カラス，中村郁らの研究で知られている．これを扇を拡張して定義される形式扇により理論的に再構築したい．

形式扇の定義は未確定であるが，扇からの様々な拡張が考えられる．大域的なモノドロミーを持つものを考えるのは当然であるが，局所的にもオービフォールドのように有限群の作用による商となっているものを考える必要があるものと思われる．また，形式扇間の正則写像や双有理写像，非特異化，計量についても考える必要がある．計量は扇の理論における支持関数の形で記述すべきものと思われるが，局所的な凸性が大域的に縮小写像を与え，拡張された意味で何らかのカスプ特異点を定義することが期待できる．トーリック型カスプ特異点は双対カスプ特異点を持つことが特徴であるが，一般の凸性を持つ形式扇についても双有理的同値類として双対が存在すると思われる．

このカスプ特異点については尾形庄悦により定義されたゼータ関数の 0 での値やヒルツェブルフ・リーマン・ロッホの定理を適用する場合に必要となる Todd 種数などの不変量があり，ゼータ 0 値が双対スプ特異点の Todd 種数に対応するという双対性定理が奇数次元の場合は尾形により，一般次元では研究代表者により示されている．また 4 次元までぐらいであれば具体例について Todd 種数などを計算機で求めることも可能となっている．これらの不変量について，一般の形式扇に対しても局所完備性や非特異性を適切に定義することにより，双対性定理が成り立つかの検証も目的とした．

３．研究の方法

この研究は代数幾何学，可換環論，組み合わせ論に深く関係しており，国内外に関係する研究者は多くいたので，研究集会などに参加して最新の研究成果を交換して研究を促進した．また，この特異点理論の創始者である土橋氏と定期的に会合を持って研究経過についての討議や意見の交換をして研究を進めた．

扇の理論における凸錐は，代数多様体のアフィン開集合に対応するアフィン環に相当する．この観点から可換環論および組み合わせ論と関係した部分を調べた．また，最近土橋氏により 3 次元および 4 次元で様々な新しいカスプ特異点が構成されたので，これを元に形式扇の研究を進めた．また，これに関係した研究集会への参加や国内の関連した研究者との意見の交換を行った．また関連した研究を行っている国内の研究者を東北大学に招いて講演を依頼したり討論を行い研究に役立てた．

４．研究成果

トーリック型カスプ特異点は土橋宏康による 1983 年の論文で導入されたものであるが，最近土橋により鏡映変換で生成される群によるカスプ特異点の例が 3 次元や 4 次元で多く与えられている.カスプ特異点を記述する形式扇は強凸有理凸多面錐を含む空間を対象 とする圏の部分圏として定義するのが適当であるが，これまではある対象の自己同型は錐の各点を固定するものを考えてきたが，土橋 による新しい例を記述するには錐の自明でない自己同型を引き起こすものも考える必要があることがわかった.また，ビンバーグによる線形鏡映群の理論と関係が深いものとして，多面錐を含む空間の写像は恒等写像だけを考える固定形式扇を定義して理論整備を行った．この未発表であるが，適当な条件のもとで無限遠方向に凸な支持関数を持つ固定形式扇が強凸開錐を台に持つ扇として実現できることを示した．この結果は 2015 年の福岡での代数幾何研究集会で発表した.

2016 年，土橋氏により 4 次元の正 24 面体の幾何学を用いて新しく構成された 4 次元トーリック型カスプ特異点は，その非特異化における例外因子が 4 つの 3 次元非特異トーリック多様体からなり，これらが互いに単純正規交叉するというめずらしいものである.この カスプ特異点はある 4 つの頂点からなる図式から得られる無限コクセター群の指数 48 の部分群により構成されるが，本研究で，この部分群を詳しく記述することにより，4 つのトーリック多様体が 48 個ある通常 4 重点でどのように交わっているかを具体的に記述することができた．トーリック型カスプ特異点を形式扇による記述と計算機プログラム化を考えているが，モデルとなるカスプ特異点のよい実例が得られ，これを計算機を用いて解析する手法が開発できた.将来において，これをさらに実用的なものにできると考えられる.

2017 年 9 月に大阪大学で開かれた第 62 回代数学シンポジウムでこれまでの研究成果の発表を行った.またこの発表の報告集ではカスプ特異点の任意の体上での構成を形式スキームの理論を用いて記述した.この報告集は日本数学会代数学分科会のページで見ることができる.また，土橋氏により構成された 4 次元トーリック型カスプ特異点は，その非特異化における例外因子である 4 つの 3 次元非特異トーリック多様体が 48 個ある通常 4 重点でどのように交わっているかを具体的に記述したことを先に述べたが，この計算結果も同報告集に記載した.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

<ins>Masanori Ishida</ins>,
Cusp singularities and quasi-polyhedral sets, Adv. Studies in Pure Math. 75, Math. Soc. Japan, (2017), 163--182, 査読 有.

<ins>Masanori Ishida</ins>, Unbounded polytopes and toric type cusp singularities,第 62 回代数学シンポジウム 報告集(Web 掲載), http://mathsoc.jp/section/algebra/algsympo.html. 2018 年 1 月，査読無

〔学会発表〕（計　2　件）

<ins>石田正典</ins>， 固定形式扇とトーリック型カスプ特異点， 杜の都代数幾何研究集会@福岡， 福岡大学セミナーハウス， 2015 年11 月27 日，福岡県福岡市

<ins>石田正典</ins>，非有界凸多面体とトーリック型カスプ特異点，第 62 回代数学シンポジウム，大阪大学理学研究科， 2017 年9 月5 日，

大阪府豊中市

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　石田 正典（Masanori Ishida）
　東北大学・大学院理学研究科・教授
　研究者番号：30124548

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者

なし