

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年6月3日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2018

課題番号：15K13426

研究課題名（和文）特異代数曲線に対するトレリ型問題

研究課題名（英文）Torelli-type problem for singular algebraic curves

研究代表者

今野 一宏（Konno, Kazuhiro）

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：10186869

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000円

研究成果の概要（和文）：非特異な複素射影代数曲面上にある必ずしも既約でも被約でもない代数曲線に対するトレリ型の問題を考察した。

当初想像していたよりも困難な問題だったため、研究期間内に決定的な結果を得ることはできなかったが、解決方法を模索する過程において、(1)重複ファイバーに対する標準線形系の基点の振る舞い、(2)必ずしも数値的3連結でない曲線に対する標準写像の挙動、(3)代数曲線束の正規極小モデルとなる特異ファイバーに対しては、その既約成分の数、種数、それから重複度からなるデータを固定すれば、変形のパラメータ空間が連結であること、を示すことができたことなど、部分的な成果は挙げられた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非特異代数曲面がもつファイバー構造の特異ファイバーに関する新たな知見が得られた。非特異曲線が重複している場合には、その標準線形系の基点の現れ方がゴナリティー（射影直線への最小写像度）によって著しくことなることが判明した。また、より組み合わせ論的に複雑な曲線の標準写像についても部分曲線の振る舞いを解明できる可能性を提示できた。また、各成分の重複度や種数を固定したとき、ファイバーの等特異な変形を記述する空間が連結であることが示されるなど、今後の当該分野の研究発展に繋がる基礎的な成果を挙げる事ができた。

研究成果の概要（英文）：I studied the Torelli-type problem for numerically connected effective divisors on a non-singular complex projective surface. Due to its difficulty, I could not obtain a definitive result. I could show some new results during the course of the study, however, on (1) canonical base points of smooth multiple fibers, (2) the behavior of the canonical map for a not necessarily numerically 3-connected curves, or (3) the connectivity of the parameter space for deformations of normally minimal models of singular fibers in a pencil of algebraic curves.

研究分野：代数幾何学

キーワード：特異曲線 トレリ型問題 周期写像

1. 研究開始当初の背景

閉リーマン面の同型類がそのヤコビ多様体とテータ因子の組で決定されるというトレリの定理は種数 2 以上の閉リーマン面の理論において、ひとつの到達点とも言うべき重要な結果である。1970 年前後に、Griffiths によって古典的な周期積分にホッジ理論的な解釈が与えられ、高次元の代数多様体に対しても周期写像の単射性を問う問題(トレリ型問題)が定式化された。しかし衆知のように、これまでに成功を見たものは閉リーマン面を除けば、アーベル多様体、K3 曲面など極めて僅かである。本研究の目指すところは、高次元化とは異なる方向の一般化である。すなわち、非特異射影代数曲面上の有効因子に対応する 1 次元射影スキームに対してトレリ型問題を定式化し、その成否を研究することである。

特異曲線に対するトレリ型問題について比較的最近の新しい研究は Caporaso-Viviani によって行われた。これは安定曲線に関するもので、この場合は対応するモジュライ空間の境界点は、考えるべき退化ヤコビ多様体とともに明瞭である。すなわちモジュライ空間のコンパクト化としては、Deligne-Mumford のトロイダルコンパクト化を採用すれば良いし、周期写像の受け手側はアーベル多様体のモジュライ空間の Alexeev によるコンパクト化を考えればよい。彼らの結果によれば、非連結的結節点をもたないような安定曲線については、この枠組での周期写像は単射である。しかし、われわれの観点からは彼らが対象とする特異曲線は非常に限定的であり、被約かつ特異点も結節点に限るため、一般的な構図は見えていないと言っても過言ではない。

2. 研究の目的

研究の究極的な目的は、非特異代数曲面上の 1 次元部分射影スキーム(有効因子)に対してトレリ型の問題を考察することにある。算術種数が 2 以上で数値的 2 連結な有効因子を主な研究対象とし、そのような曲線がネフ線形系の特異メンバーとして現れるときに最も興味がある。この場合に、半安定還元を通して、コンパクト化されたモジュライ空間からホッジ構造の分類空間への写像(周期写像)の単射性を問うのが、典型的なトレリ型問題である。一般に、モジュライ空間の境界点に対応する曲線は複数考えられ、特異曲線の位相型を固定してもそれに入る複素構造がどれほど沢山あるかはわからない。それが特定できるための良い条件を見つけることが本研究課題の主題である。

3. 研究の方法

線形系の特異メンバーとして現れる特異曲線を扱う場合、その曲線単独の基本群あるいはコホモロジー群だけでは不十分であり、退化のパラメーターに関するモノドロミー表現を取り込んだ形で「位相型」を定式化しなければならない。それに応じて周期領域の期待される境界成分の記述も異なってくる。そのような土台をまず築いて、その上で周期写像を定式化し、単射性を考察したい。より強い制限が必要になるかも知れないが、研究期間内には曲線に数値的 2 連結性または 3 連結性程度を仮定して、これを実行する。

まず、周期写像の拡張を記述するために不可欠な、位相的なデータとして必要な事柄を抽出する。そのために特異曲線の方程式を書き下し、その正規化およびホモロジー基底を明示的に与え、計算機を援用して具体例を多数計算する。特に非特異曲線をサポートにもつ重複ファイバーや種数 2 曲線の退化として現れる特異曲線を網羅的に走査する。研究の進捗状況に応じて適宜、方針に修正を加え目標達成を目指す。副産物を含めて、得られた成果は国内外で開催される研究集会やセミナーで発表する。同時に、学術論文等にまとめて公表する。研究を遂行するために、既存の、或いは購入予定の学術図書によって関連諸分野の知識を身につける。また、国内外旅費を活用し各地の研究者と直接会って議論し、関連する研究集会に参加して、積極的に資料収集にあたる。

研究組織の基本形態は、研究代表者による単独研究とするが、必要に応じて、各地の研究者に協力を仰いで研究計画を遂行していく。とりわけ、ホッジ理論を専門とする国内の研究協力者と緊密に連絡をとって議論することは、研究推進のために欠かすことができない。

4. 研究成果

代数曲面がもつファイバー構造の特異ファイバーにおいて、もっとも典型的な非安定曲線は、非特異代数曲線が重複したファイバーである。このような曲線は、ファイバー構造の局所変形に対して安定であり、いわゆるひとつの原子ファイバーであることが知られている。研究の第一歩として、このような重複ファイバーとその半安定還元として得られる代数曲線について、ゴナリティーや重複ファイバーの標準線形系の基点に着目して研究を進めた。これによって、例えば素数のゴナリティーを持ち、種数がそれより十分に大きい曲線を半安定還元とする場合には、重複ファイバーの重複度は必然的にゴナリティーと一致せねばならず、しかも重複ファイバーの標準線形系は必ず基点をもつことが証明できた。このことから重複ファイバー相当の曲線についてトレリ型の問題を考える際には、重複度を与えるモノドロミーデータのみならず、

基点に相当するデータが必要になることが明らかとなった。この結果に基づいて、重複ファイバーの堀川指数などの局所的な数値的不変量をいくつか計算した。また、これまで知られていなかった3重ファイバーの具体例を可能なすべての種数に渡って構成することにも成功した。

特異代数曲線を退化ファイバーにもつ代数曲線ファイバー芽に対して、位相的なモノドロミーデータを加味した周期写像の理論を構築することが最終目標のひとつであり、そのための有望な方法は安定還元を用いることである。安定還元の後には非特異曲線になるようなものに対して標準写像による像を研究した。その結果、特異ファイバーが数値的3連結でなければ非特異な曲線とは著しく異なる振る舞いをすることがわかった。例えば特異曲線の一部が超楕円曲線のように2重被覆となったり、他の既約成分と重なったりする現象が見られ、統一的な記述は極めて困難である。残念ながら、このような現象とモノドロミーデータとの関連は解明できなかった。

また、特異曲線の複素構造の変形に重点を置いた研究を行った。すなわち、非特異代数曲面上の可約で被約でない正因子について、そのサポートにおける交点形式が半負定値であるという仮定の下で、その複素構造の微小変形およびその倉西空間を研究した。この仮定は、代数曲線束の特異ファイバー等特異変形を念頭に置いたものであり、倉西空間の研究は周期写像を考察する際に定義域の幾何学的特性を理解するために必要である。良く知られているように、閉リーマン面のモジュライ空間は、種数を決める毎に連結である。そこでまず、特異ファイバーの等特異変形をパラメトライズする空間の連結性を明らかにしようと考えた。その結果、代数曲線束の正規極小モデルとなる特異ファイバーに対しては、その既約成分の数、種数、それから重複度からなるデータを固定すれば、パラメーター空間は連結であることを示すことができた。これは、特異点の場合、すなわち交点形式が負定値の場合の、H.B. Laufer の定理に相当する。

以上のように、個々の話題に限ればそれなりの研究成果を挙げることができたが、本研究の課題は当初想像していた以上に困難な問題であったため、研究期間内に決定的な結果を得ることができなかった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計5件)

[1] [Kazuhiro Konno](#) and Ezio Stagnaro, Sextic curves with six double points on a conic, *Methods and Applications of Analysis* (査読有), 24 (2017), 295-302

[2] [Kazuhiro Konno](#), Supplement to: Certain normal surface singularities of general type *Methods and Applications of Analysis* (査読有), 24 (2017), 293-294.

[3] [Kazuhiro Konno](#), Normal canonical surfaces in projective 3-space, *International Journal of Mathematics* (査読有), 28 (2017), 17pages

[4] [Kazuhiro Konno](#), Certain normal surface singularities of general type, *Methods and Applications of Analysis* (査読有), 24 (2017), 71-97

[5] [Kazuhiro Konno](#), A note on smooth multiple fibers in pencils of algebraic curves, *Nihonkai Math. J.* (査読有), 26 (2015), 103-120.

〔学会発表〕(計6件)

1. [今野一宏](#)「Normal surface singularities and Yau cycles」第5回代数幾何学研究集会 宇部 (招待講演), 2018年, 宇部工業高等専門学校.
2. [Kazuhiro Konno](#), Normal surface singularities and Yau cycles」Algebraic Geometry Seminar (招待講演), 2017年, Dalian University of Technology (中華人民共和国)
3. [Kazuhiro Konno](#), Canonical surfaces of degree $3n-3$ in projective n -space, Algebraic Geometry Seminar (招待講演), 2016年9月6日, East China Normal University (中華人民共和国)
4. [今野一宏](#)「Canonical surfaces of degree $3n-3$ in projective n -space」第13回代数曲面ワークショップ (招待講演) 2016年7月2日, 高知工科大学.
5. [今野一宏](#)「平面6次曲線と標準曲面」第11回代数・解析・幾何学セミナー (招待講演), 2016年02月15日, 鹿児島大学理学部

6. 今野一宏「一般型曲面の多重標準写像と標準環」第 60 回代数学シンポジウム(招待講演),
2015 年 09 月 01 日, 静岡大学理学部

{ 図書 } (計 2 件)

1. 今野一宏「平面代数曲線のはなし」内田老鶴圃, 2017 年, 170 ページ.
2. 今野一宏「リーマン面と代数曲線」共立出版, 2015 年, 272 ページ.

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。