

平成 30 年 6 月 7 日現在

機関番号：10101

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13431

研究課題名(和文) サプリーマン幾何学の視覚モデルへの応用

研究課題名(英文) Application of sub-Riemannian geometry to vision model

研究代表者

石川 剛郎 (Ishikawa, Goo)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：50176161

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：接触構造を用いた視覚機能に関する幾何学理論を発展させた。特に高次化したグルサ系制御の基礎理論を確立し、モデルに反映させる研究を行った。また、サブリーマン幾何に関わる写像の特異点論に関して、本研究課題で派生しフィードバックされたルジャンドル特異点、異常測地線、零測地線、エンゲル構造、 G_2 構造、 $(2, 3, 5)$ 分布の問題について研究を行った。研究課題の研究によって得られた知見を含む結果として国際的学術雑誌に論文を発表し国際研究集会で成果発表を行っている。

研究成果の概要(英文)：We have developed the geometric vision theory by contact structures. In particular the basic theory on Goursat controls of higher degree is established and is applied to models. Moreover, related to singularity theory of mappings on sub-Riemannian geometry, we have investigated the problems, as a feedback of the research project, on Legendre singularities, abnormal geodesics, null geodesics, Engel structures, G_2 structures and on $(2,3,5)$ -distributions. As consequences of results obtained by the research project, we published articles in international academic journals and gave lectures on them in international conferences.

研究分野：微分式系の特異点論

キーワード：グルサ系 接触構造 エンゲル構造 G_2 構造 ルジャンドル特異点 $(2,3,5)$ -分布 異常測地線 零測地線

1. 研究開始当初の背景

研究の背景-視覚理論:

視覚理論、とくに脳の視覚野 V1 等の機能解明のモデルとして、平面接触要素の作る 3 次元接触多様体上の接触構造および、その上のサブリーマン変分問題が提唱されている。この理論は、D. Mumford による“エラスティカ”の理論 (1992) を精密化した視覚モデル理論である。エラスティカの理論では、 $(\alpha\kappa^2 + \beta)ds$ 型のエネルギー (κ は平面曲線の曲率) の最小化問題として、視覚境界を捉えていたが、そのような平面曲線の変分問題を、その Legendre 持ち上げに関する変分問題として考える「かざぐるま (pinwheel) 理論」である。なお、離散モデルであるかざぐるま・フレームレット理論が新井仁之等によって提唱され錯視等に応用されている (H. Arai, S. Arai, Framelet analysis of some geometrical illusions, Japan J. Indust. Appl. Math., 27 23-46)。

研究の背景-サブリーマン幾何:

制御理論では、状態空間の 2 点、A の状態から B の状態への拘束条件を満たす経路の中で、与えられた汎関数 (長さ関数、エネルギー関数や時間関数など) を最小、あるいは極小にする経路 (測地線) の存在、その性質、具体的構成などを問題とする。その中で、特に、サブリーマン幾何学では、拘束条件として、接触構造や Engel 構造のようにブラケットで生成される (すなわち、Hormander 条件を満たす) 完全非可積分な微分式系を設定し、微分式系に正値 Riemann 計量を与える。この時、Hamilton 関数 (エネルギー) が定まり、Hamilton 方程式の解により、2 種類の局所最短経路として正常測地線の他にサブリーマン幾何特有の対象である異常測地線が得られる。

研究の背景-グルサ・モンスターの幾何:

視覚のかざぐるま理論では、従来は平面の 1 次の方向性のみを考慮して、接触構造を扱っているが、高次の視覚理論を構築するには、高次の方向性まで考える必要が生じる。接触構造の高次化は、グルサ・モンスターとして知られている (R. Montgomery, M. Zhitomirskii, Points and Curves in the Monster Tower, Memoirs of the Amer. Math. Soc. 2010)。

2. 研究の目的

接触構造の延長であるグルサ微分式系のサブリーマン幾何の特異性・対称性を明らかにし、グルサ・サブリーマン幾何における成果を、視覚理論への接触サブリーマン幾何の応用に基づき、高次視覚モデルの研究に応用する。さらに、応用により得られる知見を、グルサ系の一般化に反映させることを目的とする萌芽研究である。

次の研究目標に挑戦する:

グルサ・サブリーマン構造を利用した視覚モデル理論の高次化。

グルサ・サブリーマン変分問題の特異解の視覚モデルへの適用。

一般グルサ構造の対称性・特異性理論の構築と視覚モデルへの応用。

3. 研究の方法

上に述べた 3 つの研究目標「グルサ・サブリーマン構造を利用した視覚モデル理論の高次化」「グルサ・サブリーマン変分問題の特異解の視覚モデルへの適用」「一般グルサ構造の対称性・特異性理論の構築と視覚モデルへの応用」を年度ごとに期間分けをして計画を立て、随時並行して研究交流を行いながら解決していく。従来の理論・実験結果に基づき最適なサブリーマン計量を洗い出しリスト化して分類・比較し、グルサ構造上の隠れた対称性を持つサブリーマン計量に対する変分問題を解き、その特異性を記述する。さらに、変分問題の解を高次視覚モデルに応用する。いままでの人脈・研究協力者との情報交換を行いながら、視覚モデルに関する新たな研究交流を行っていくことで、高次視覚モデルへのグルサ・サブリーマン幾何学の応用とそれに応じたサブリーマン幾何の展開に挑んでいく。

4. 研究成果

視覚機能に関する理論を基に、高次化したグルサ・サブリーマン幾何の基礎理論を確立し、モデルに反映させる研究を行った。また、サブリーマン幾何に関わる写像の特異点論に関して、本研究課題で派生しフィードバックされたルジャンドル特異点論、接触幾何学の問題について一連の研究を行った。研究課題の研究によって得られた知見を含む成果として、国際的学術雑誌に査読付き論文を発表している。また、平成 27 年 9 月にワルシャワにおいて研究会「Geometric Singularity Theory, Polish -Japanese Singularity Theory Working Days」をオーガナイザーとして開催し、講演「Leibniz complexity of Nash functions on differentiation」を行った。さらに、平成 28 年 9 月にスペインのマラガにおいて開催された研究集会「VIII International Meeting on Lorentzian Geometry」に参加し、研究発表「Null frontal singular surfaces in Lorentzian 3-spaces」を行った。さらに、平成 28 年度に、共著論文「Goo Ishikawa, Tatsuya Yamashita, Singularities of tangent surfaces to directed curves」および単著論文「Goo Ishikawa, Singularities of frontals」を執筆した。視覚機能に関する理論を基に、それを発展させ、高次化したグルサ・サブリーマン幾何の基礎理論を確立することができた。サブリーマン幾何に関わる写像の特異点論に関して、本研究課題で派生しフィードバックされたルジャンドル特異点論の問題について研究も進めることができた。従来の視覚モデルおよびモデルに関する理論・実験結

果の収集を行い、マンフォードによるエラスティカの理論を精密化した視覚モデル理論、特に脳の視覚の視覚野 V1 等の機能解明のモデルとして、平面接触要素の作る 3 次元接触多様体上の接触構造および、その上のサブリーマン変分問題平面曲線の変分問題を、そのルジャンドル持ち上げに関する変分問題として考える「かざぐるま理論」などに関する情報収集を行うことができたが、まだ論文作成までは至っていない。ただし、接触構造の延長であるグルサ微分式系のサブリーマン幾何の特異性・対称性を明らかにし、グルサ・サブリーマン幾何における成果を、視覚理論への接触サブリーマン幾何の応用に基づいて、高次視覚モデルの研究に応用することを目指し、さらに、応用により得られる知見を、グルサ系の一般化に反映させることを目的とした。具体的な研究目標である、グルサ・サブリーマン構造を利用した視覚モデル理論の高次化、グルサ・サブリーマン変分問題の特異解の視覚モデルへの適用、一般グルサ構造の対称性・特異性理論の構築と視覚モデルへの応用、については、いくつか知見を得ることができた。特に、平成 29 年 9 月にポーランド科学アカデミーのパナッハ研究所(ベドレボ)において、代数的幾何的特異点研究会を開催し、本研究課題に基づいて関連する研究者と研究連絡をおこなうことができた。その中で、分布の延長の概念を、接触構造ではなく、いわゆる $(2,3,5)$ 分布に適用することにより、 $(2,3,5)$ 分布とラグランジュ錐構造の双対性を G_2 型の擬直積構造を経由して、明確に記述・解析することに成功している。すなわち、接触構造からエンゲル構造に延長することの類似として、 $(2,3,5)$ 分布の延長を研究したが、さらにその延長、高次グルサ構造の解析を開始した。この独創的な問題設定は、先鞭をつけるに止まったことは残念であるが、今後は、本課題研究の成果である基礎研究を発展させ、視覚の理論へ応用することを試みていく計画である。ここでは、成果報告として、 $(2,3,5)$ 分布に関する研究について述べて、結論としたい。なお、この成果については、共著論文 Goo Ishikawa, Yumiko Kitagawa, Asahi Tsuchida, Wataru Yukuno, Duality of $(2,3,5)$ -distributions and Lagrangian cone structures, を執筆中である。視覚理論にかかわる接触構造は、平面の接束の延長として得られる 3 次元空間上の階数 2 の分布であり、括弧積についての増大ベクトルは $(2, 3)$ である。 $(2,3,5)$ 分布とは、5 次元空間上の階数 2 の分布で、1 回の括弧積で階数 3 になり、もう 1 回の括弧積で全体の階数 5 となるものである。平坦な場合の対称性の代数が例外型リー代数 G_2 となることを Cartan が示したことで古典的に有名である。ここでは、平坦とは限らない任意の $(2,3,5)$ 分布の構造を解析した。 $(2,3,5)$ 分布を延長すると、6 次元空間の上の $(2,3,4,5,6)$ 分布ができ

る。この階数 2 の分布は特徴的であり、異常測地線により、内在的に階数 1 の部分束の直和になり、田中昇の意味での擬直積構造となる。その 1 つの成分方向へ射影すると、もとの 5 次元空間が得られるが、もう 1 つの方向へ射影すると、新しい 5 次元空間ができる。この 5 次元空間は、もとの $(2,3,5)$ 分布に関する異常測地線の空間と同一視できる。さらにその 5 次元空間の上には、2 次元ラグランジュ錐構造が誘導され、それを制御系と見たとき、その異常測地線の空間は、もとの $(2,3,5)$ 分布がある 5 次元空間と同一視される。そのラグランジュ錐構造の特徴付けが本課題研究の副産物として得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Goo Ishikawa, Tatsuya Yamashita, Leibniz complexity of Nash functions on differentiations, to appear in Journal of the Mathematical Society of Japan. (accepted on 10 March 2018). 査読有。

Goo Ishikawa, Tatsuya Yamashita, Singularities of tangent surfaces to directed curves, Topology and its Applications, 234 (2018), 198-208 (accepted on 18 July 2017). <https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.11.018> 査読有。

Goo Ishikawa, Singularities of frontals, to appear in "Singularities in Generic Geometry", Advanced Studies in Pure Mathematics, Mathematical Society of JAPAN (accepted on 26 June 2017). 査読有。

Goo Ishikawa, Stanislaw Janeczko, Residual Algebraic Restrictions of Differential Forms, Methods and Applications of Analysis, vol. 24, No. 1 (March 2017), 045--062. 査読有。

Goo Ishikawa, Tatsuya Yamashita, Singularities of tangent surfaces to generic space curves, Journal of Geometry, vol.108 (2017), 301--318. doi:10.1007/s00022-016-0341-3 査読有。

[学会発表](計 9 件)

Goo Ishikawa, Duality of $(2,3,5)$ -distributions and Lagrangian cone structures, January 26th 2018, Contact structure,

Singularities, Differential equations and related area, Satellite Plaza of Kanazawa University, Kanazawa, Japan.

Goo Ishikawa,

Stability of parametric Lagrangian and Legendrian varieties, December 13 (2017). International Conference on Singularity Theory and Dynamical Systems|in Memory of John Mather, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University 三亚, 海南島, 中国, December 11--15, (2017).

Goo Ishikawa,

Stability of Frontal Singularities, RIMS , Kyoto, JAPAN, 28 November 2017. RIMS 共同研究(公開型) 可微分写像の特異点論の局所的研究と大域的研究 京都大学数理解析研究所, 2017年11月28日.

Goo Ishikawa,

Duality-singularity of indefinite metrics and contact structures, 1 August 2017, Singularities in Generic Geometry and its Applications: Valencia V, Facultad de Ciencias, UNAM, Mexico City, 31 July -- 4 August 2017.

Goo Ishikawa,

Duality of (2,3,5)-distributions and Lagrangian cone structures, July 16 2017, The memorial workshop for the retirement of Professor Keizo Yamaguchi, July 14 -- July 16 2017, Kobe University, Kobe, Japan.

Goo Ishikawa,

Recognition Problem of Frontal Singularities, June 1 2017, Applications of Differential Geometry and Singularity Theory, June 1 -- June 3, 2017, Iwate Medical University, Morioka, Japan.

Goo Ishikawa,

Duality-singularity of indefinite metrics and contact structures, March 8 2017, 24th Numazu conference, March 6 -- March 8, 2017, Numazu College of Technology, Shizuoka, Japan.

Goo Ishikawa,

Duality-singularity of indefinite metrics and contact structures, 20 January 2017, Contact structure, Singularities, Differential equations and related area, Satellite Plaza of Kanazawa University, Kanazawa, Japan.

Goo Ishikawa, Yoshinori Machida, Masatomo Takahashi, Null frontal singular surfaces in Lorentzian 3-spaces, VIII International Meeting on Lorentzian Geometry Malaga (Spain), 20--23 September 2016. (poster presentation).

〔図書〕(計0件)

なし

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石川 剛郎 (ISHIKAWA Goo)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号: 50176161

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

なし