3版

様 式 C－１９、F－１９－１、Z－１９ （共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年 　９ 月 　７ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１３４３３
研究課題名（和文）4次元ポアンカレ予想を含む幾何的トポロジーの形式化

研究課題名（英文）Formalization of geometric topology towards 4-dimensional Poincare conjecture

研究代表者
久我　健一（KUGA, KENICHI）

千葉大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：３０１８６３７４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：我々は幾何的トポロジーにおいて位相同型写像を作る基本的な手法を提供するビング収縮定理を証明支援系Coq/SSReflectを用いて形式化した。この定理は直感的には異なるように見える空間の間に位相同型写像を与える時に用いられる。この定理の重要な応用例の一つはフリードマンによる４次元ポアンカレ予想の解決であり、そこでは、キャッソンハンドルと標準的ハンドルの間の位相同型写像が構成される。我々は、この定理を形式化するために、まだ多くの形式化を必要とするが、本質的な困難は形式化に必要な膨大な時間だけであると考えている。我々は形式化の負担軽減の目的で、Coqへの簡単なpythonインターフェースも作った。

研究成果の概要（英文）：We formalized Bing's shrinking theorem in geometric topology. This theorem provides a basic method to construct homeomorphisms between topological spaces in such circumstances where the topological spaces in question may look quite different. The most striking applications of this shrinking method include Freedman's solution of the 4-dimensional Poincare conjecture in 1981, where the two spaces in question are Casson's strange 2-handles and standard 2-handles. In our formalization, we used the proof assistant Coq/SSReflect. Although we still have much to go to formalize "Casson handles are standard 2-handles theorem", there seems to be no essential obstacle except for the need of a large amount of time. We made a simple python interface for Coq, which we hope may ease our work of formalization.

研究分野：トポロジー

キーワード：幾何的トポロジー　ビング収縮法　　形式化　Coq/SSReflect

１．研究開始当初の背景

数学を公理に基づいて厳密に許された推論のみを用いて定理を証明することは、ホワイトヘッドとラッセルの「数学原論」で試みられてから、極端に困難であることが認識され、人の手による実行は進まなかったが、近年の計算機の進歩と、対話的証明支援システムの発展により、この「数学の形式化」の実行が現実的となって来ていた。また、計算機が飛躍的に発展してきた現在においては、「数学の形式化」は公理的立場の実践という理念のみならず、数学を計算機が理解可能なデータにする、という実際的な意味合いを持ち、将来的な数学の自動化に向けた試みとして、徐々に重要性が高じてきた。

実際、論理学と計算理論の境界領域においてINRIA（フランス国立情報学自動制御研究所）が、1980 年代初頭から開発を続けてきた型付きラムダ計算の一種である証明支援システム Coq を用いて、2004 年に 4 色定理の証明の形式化した。このことは、将来的な証明の自動化に向けて、このような構成的証明原理に基づくシステムがグラフ理論の難解な問題を形式化しうることを示した点で大きな達成と考えられている。さらに 2012 年に有限群論の難解な定理であるファイト・トンプソンの定理が Coq によって形式化され、また 2014 年 8 月には、Kepler 予想の完結を目指した米国における Flyspeck プロジェクトが 11 年をかけて目標を達成し、数学は電子化の時代を迎え始めた。

しかし、このような証明支援システムを用いた数学の形式化、電子化は、未だ非常な人的労力を必要とし、しかも、対象分野も散発的な成果を除いて、組合せ論や有限群論といった範囲を超えておらず、特に実数概念や位相の概念が関連する分野においては、体系的な形式化は進んでいなかった。実際、たとえば Coq/SSReflect の数学ライブラリーである Mathcomp においても、位相空間の基礎概念の形式化は含まれておらず、実験的形式化の計画があるのみであった。このように、状況にあって、さらに広汎な数学定理の形式化を行うとともに、そこに生じる課題を特定していく地道な努力の継続が必要とされていた。

２．研究の目的

（１）上記のように、数学の公理から定理に至る論理的過程を完全に電子化する、これらの「形式化」は主に有限な対象を扱っているが、数学の全般的な形式化、電子化を行うためには、その基礎の柱の一つとして、位相概念を形式化することが必須である。本研究では証明支援システムによる形式化をトポロジー分野において行い、その過程で課題点を洗い出すことを目的としている。そのための具体的問題として、従来一部の専門家を除いて、検証が難しいとされている 4 次元ポアンカレ予想の証明の核心部分の形式化を目標に、幾何的トポロジー理論の形式化を進めることを目標として設定した。

これに向けて、幾何的トポロジーにおいて幾何的直観を超える同相写像の構成法であるビング収縮定理を形式化し、それを用いて、フリードマンの可算シェンフリース定理の形式化を行い、位相的４次元多様体トポロジーの核心的な定理である「キャソンハンドル＝位相的ハンドル定理」を形式化することを目指すこととした。

（２）実際問題として、これらの形式化にかかる人的労力は非常に大きく、現実には、小規模の研究組織で、広汎な形式化を短期間で達成することは難しい。しかし、本研究の目標は、特定の定理の形式化そのものにあるというよりも、伝統的な数学においても簡単でないと思われる定理を形式化する過程で、形式化の手続きを整備し、多くのルーチン部分を自動化し、より広範な数学の形式化に向けて、理論的、技術的課題を地道に解決していくことが大きな立場からの研究目的である。このために、計算機のより本質的で、自律的使用が重要となる。この観点から、深層学習フレームワークを証明支援系と連携する環境の構築は研究基盤の整備という意味で、地味であるが大きな意味を持つ。現時点で、TensorFlow 等の多くの深層学習フレームワークは Python から利用可能であるので、具体的には Python から証明支援システムがスムースに使用できる環境を作ることもこの研究の目的となった。

３．研究の方法

（１）本研究では研究目的達成のためのシステムとして、すでに四色定理とファイト・トンプソンの定理の形式化を達成した COQ/SSREFLECT を用いた。これは型理論に基づくシステムであり、原理的には自然数、実数、位相空間といった数学概念を公理から構成することができる。これは古典論理に基づく集合論を基礎とする伝統的数学と異なり、帰納構成計算に基づく型理論を基礎においている。このため、どこで古典論理を用いたのか、どこで非構成的議論を用いたのか、またどのような選出公理を用いるのか、について、明確にする必要があるシステムである。従って、我々は、初めから古典論理を前提におくのではなく、古典論理（排中律）を用いた場所をその場、その場で指定することとした。これは構成的議論やプログラム抽出といった面から重要なことであると考えた。我々はこの COQ/SSREFLECT を用いてベールカテゴリー定理の形式化に成功していた。従って、フリードマンの４次元ポアンカレ予想の解決における核心的定理と言える「キャソンハンドル＝位相的ハンドル定理」の同相写像を構成するビングの収縮定理の証明を形

式化することが一つの現実的ステップとなった。このビング収縮定理は幾何トポロジーの基本手段であって、一般シェンフリース定理の形式化も視野に入るため、キャッソンハンドルが位相的ハンドルであることを示す基礎である。それに続いて、フリードマンの方法を、形式化を行うことになるが、形式化は完了するまで、その困難さは判断できない。そこで、形式化の完了自体を急ぐよりも、このような過程で達成される各段階の形式化を洗練化することによって、手続きを一般化し、自動証明化に向けた形式化が重要となる。

（２）　実際問題としての形式化は、現在の計算機と証明支援システムを用いても、未だ膨大な人的労力を必要としている。そこで、これより形式化をさらに進める方法として、証明支援システムと深層学習の連携をどのように行うのかを考えることが重要である。深層学習フレームワークとして我々は TensorFlow 及び Keras を用いる。初めの問題としては、Coq のような証明支援ソフトと Tensorflow の連携環境の構築である。TensorFlow 及び Keras は Python から使用することができるので、実際には Python から Coq 等を使用できるようにする。実際に Python を介して深層学習、特に Deep Q network 等の深層強化学習を適用して効率的な学習が行えるようにすることは、最大のテーマであるが、本研究とは別に立てるべきテーマであるので、我々はできるだけシンプルな Coq への Python インターフェースを作って、作業の簡易化を目指すとともに、自動証明に向けた取り組みの一環とする。

４．研究成果

（１）ビング収縮定理の証明支援システム Coq を用いた形式化の達成と SSReflect 拡張を用いた形式化の整備。
研究の基礎となっている位相空間の形式化の一部と、ベールカテゴリー定理、ビング収縮定理の形式化を、COQ と SSReflect 拡張の混在から、より SSReflect 拡張を用いたものへと整備した。我々の形式化について少し詳しく述べる。証明支援システムには、通常の集合論に基礎を置く、高階論理に基づいた HOLLight や Isabelle/HOL などがあり、これらは古典論理を使用している。一方我々の用いた COQ は帰納的構成計算に基づく型理論を基礎としていて、たとえば、排中律の使用はそのままではできない。これは、構成的議論を前提とするためであり、カリー・ハワード同型によって、証明＝プログラムという観点に立てば、望ましい立場と考えられる。しかし、厳密に構成的立場に立てば、背理法の使用は無条件ではできず、選出公理の使用も許したとしても、制限される。このため、トポロジーのように、集合論と密着している分野を Coq で形式化しようとするとき、これらの制限は、形式化をほぼ不可能にする（たとえば、集合の特性関数：要素ならば１そうでなければ０を返す関数、も無条件では仮定されない）。その上で形式化を行うためには、一つの方法は、古典的論理を初めから全般的に仮定することであり、選出公理も無条件に仮定するやり方である。しかし、より望ましいのは、個々の議論について、どこで古典論理を使ったか、またどの範囲の選出公理を使用したかを明示することであり、我々の形式化はこの、できるだけ後者の方法をとるように努めた。このため、形式化は自動的に古典論仮定した場合よりも複雑なものとなっている。実際 Coq の SSReflect 拡張については、eqtype が導入され、自然数型などが COQ と十分な整合性がなく、特に実数の扱いが未だ定まっていないため、現時点でも完全な SSReflect 化は原理的にも難しいが、可能な範囲で十分整備されたと考えている。この結果は国際会議 CICM2016(Conference on Intelligent Computer Mathematics, Bialystok, Poland)で発表し、Springer のレクチャーノート LNAI9791 で出版された。

（２）位相的対象を形式化する際の抽象化の重要性の指摘。フリードマンによる可算シェンフリース定理の形式化に向けて、特定次元のユークリッド空間中の具体的な円板や球面を扱うのではなく、これらの性質を抽象化して収縮定理を適応することの重要性を指摘し、抽象的胞体性の概念を定式化した。伝統的な数学の立場では、このような抽象化は、数学的に範囲を広げ、新しい応用を生むことが不明な場合には、意義が少ないと考えられる傾向があるが、COQ のような証明支援系が基礎としている帰納的構成の論理では、構成的議論と非構成的議論を分離する意味でも、また、実数概念を用いた多様体やさらに n 次元球面などの具体的な形式化に依存しない可搬的な形式化という意味でも意義が生まれていると考えている。これらの抽象的胞体性は、上記の論文「Formalization of Bing's shrinking methon in geometric topology, Lecture Notes in Artificial Intelligence 9791, Springer (2016)」において発表した。

（３）証明支援システムに深層学習を適用するための準備的研究の開始：

　本研究の遂行で一層明瞭になったことは、数学の形式化を位相空間や解析の諸概念にわたって実行するためには、少なからず、証明の自動化が必須であるという点である。自動証明の理論は多くの場合、一階述語論理で書かれた数学を対象としており、現実に伝統的数学の形式化に使用される証明支援システムが用いている高階論理と差が生じている。もちろん、高階論理を一階述語論理に書き換え、そこで、現在最も優秀な一階証明支援器を複数競争的に使用するという試みは、

すでにIsabelle/HOLにおけるsledge hammerやCOQにおける coqhammerとして開発が始まっているが、現状では十分な性能が得られているとは言い難い。さらに、もっとも重要なことは、これらの一階証明器が「証明」を出力したとしても、それは厳密な「形式化」ではなく、あくまで証明支援システムがそれを目安にして、形式化をする必要が残ることである。そこで、将来的に有望な方向として、現在進展している深層学習を証明支援系に使用するという発想が自然に出てくる。実際2018 年３月の時点で、Google において HOLLight のタクティクスを４０程度に絞り、証明しようとする論理式のゴール部分だけに１次元畳み込みニューラルネットワークを適用する研究が行われている。しかし、これも十分な性能は未だ発揮していない。最も望まれるのは、深層強化学習の適用であるので、我々はその準備的研究として、深層学習フレームワークとして代表的な TensorFlow と、証明支援システムを連携するソフトウェアとして PICoq(Python Interface for Coq) を作成した。Pythonのクラス　PICoqは抽象クラス PIPas（Python Interface for Proof Assistants）を継承するように作ってあり、Coq 以外の証明支援システムにも拡張されるようになっている。これを用いた形式化はまだ進んでいないが、基盤環境として重要だと考えている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１　件）

① Ken'ichi Kuga, Manabu Hagiwara, Mitsuharu Yamamoto
“Formalization of Bing's shrinking methon in geometric topology”, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 査読有,9791号, Springer (2016) pp18-27
DOI： 10.1007/978-3-319-42547-4_2

〔学会発表〕（計　１　件）

①Ken’ichi Kuga
“Formalization of Bing's shrinking methon in geometric topology”
Conference on Intelligent Computer Mathematics, Bialystok, Poland
2016年 7/25-7/29

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ソフトウェア
① 形式化プログラム：https://github.com/CuMathInfo/Topology

②CoqへのPythonインターフェースプログラム：Python Interface for Coq：https://bitbucket.org/kenkuga/picoq

６．研究組織

(1) 研究代表者
久我　健一（KUGA, Ken’ichi）
千葉大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号： 30186374

(2)研究協力者
〔主たる渡航先の主たる海外共同研究者〕

〔その他の研究協力者〕
萩原　学（HAGIWARA, Manabu）
千葉大学・大学院理学研究院・准教授

山本　光晴（YAMAMOTO, Mitsuharu）
千葉大学・大学院理学研究院・教授