

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 6 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13434

研究課題名(和文) 離散幾何学と3次元実体模型の制作

研究課題名(英文) Discrete geometry and creation of 3 dimensional geometric models

研究代表者

河野 俊丈 (KOHNO, Toshitake)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：80144111

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、3Dプリンターの技術では達成できないような、金属を削り出して制作する高精度の3次元模型、離散群の極限集合、特異点理論、葉層構造、可積分系など、従来の方法では扱うことが困難であった対象の模型の制作を扱った。研究代表者は、1/100mm未満の精度を実現する技術を開発してきた。精度を上げるために、離散点データとメッシュに加えて、曲面の法線方向のデータを加味する必要がある。この研究によって、直接、精度の高い3次元模型がつくられるようなインターフェースを開発した。

研究成果の概要(英文)：In this research we developed a method to create extremely accurate 3 dimensional models of surfaces appearing in geometry and topology by curving metals. This method realized models much more accurate than those created by 3D printers. We also developed techniques realizing limit sets of discrete group and objects in singularity theory, foliation theory and integrable systems, which were difficult to create by previous methods. By adding data of normal direction to discrete point data sets and mesh, we realized accuracy of less than 1/100mm. Our research established a new interface for creating accurate 3 dimensional models.

研究分野：位相幾何学，数理物理学

キーワード：離散幾何学 定曲率曲面 極小曲面 代数曲面 特異点理論 可積分系 極限集合 離散データ

1. 研究開始当初の背景

19 世紀の末から 20 世紀のはじめにかけて、ドイツでクラインなどの数学者を中心として当時の先端的な数学の研究から得られた曲面の模型を、実際に石膏で制作するプロジェクトが行われた。模型のジャンルは、代数幾何学、微分幾何学、複素関数論などさまざまな分野にわたっていて、代数幾何学では、3 次曲面、4 次曲面の模型、微分幾何学では、ガウス曲率が一定の曲面、極小曲面など、また、複素関数論では、ワイエルシュトラスの楕円関数やヤコビの楕円積分のグラフなどが制作された。模型の制作は 1930 年代まで、Martin-Schilling 社によって行われた。これらの模型は 20 世紀のはじめに東京大学理学部数学科に輸入され、現在、東京大学大学院数理科学研究科のコレクションとして資料室に展示されている。

研究代表者は、これらの模型の保管、展示を行うとともに、現代の技術によって、実際にこのような曲面の模型を制作するプロジェクトを推し進めてきた。東京大学大学院数理科学研究科における客員講座およびヤマダ精機との協力によって、アルミを削ることによって精度の高い模型を制作してきた実績があり、負の定曲率曲面

<http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~topology/photos/pseudosphere.jpg>

クレブッシュ 3 次曲面上の 27 本の直線

<http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~topology/photos/cubic.jpg>

などが、東京大学大学院数理科学研究科に展示されている。現代の幾何学には、曲面論のみならず、離散群の極限集合、特異点理論、葉層構造、可積分系における解の挙動など模型として制作する事により、研究に大きく貢献すると思われる題材が多くある。しかしながら、コンピュータの画面上の表示することができても、それを実際の 3 次元模型として制作するには、さまざまな困難があった。

2. 研究の目的

現代の幾何学には、曲面論のみならず、離散群の極限集合、特異点理論、葉層構造、可積分系における解の挙動など模型として制作する事により、研究に大きく貢献すると思われる題材が多くある。しかしながら、コンピュータの画面上の表示することができても、それを実際の 3 次元模型として制作するには、さまざまな困難がある。まず、離散データからどのようにして曲面を削りだすのに適したファイル形式を構成するかという問題がある。実際に刃を当てて削るには、曲面の法線方向のデータを適切に取り込む必要がある。また、離散群の極限集合などの対象については、クリスタルガラスの中にレーザー光でプロットする手法を開発中であり、4 次元クライン群の極限集合の 3 次元模型について、これまでに試作を行ってきた。本研究では、3D プリンターなどでは表現できないような対象も含めて、より精度の高い 3 次元実体模型の制作のための技術を開発することを目的とする。

3. 研究の方法

近年は、コンピュータを用いて 3D プリンターで幾何学模型を出力することも一般的になった。本研究では、3D プリンターの技術では達成できないような、金属を削り出して制作する高精度の 3 次元模型、離散群の極限集合、特異点理論、葉層構造、可積分系など、従来の方法では扱うことが困難であった対象の模型の制作を目指している。曲面の模型の精度についてであるが、基本的には、離散点データからメッシュを構成し、それぞれのメッシュについてよい近似をとって構成する方法がとられているため、理論的に誤差が生じるのはまぬかれない。したがって、精度を上げるために、どのようなメッシュ分割と、ファイル形式が適切かという問題が生じる。離散データから、単体分割された曲面を構成する標準的な方法は知られていないので、この点で、いくつかの理論的な側面を克服する

必要がある．研究代表者は，ヤマダ精機との共同研究により，1/100mm未満の精度を実現する技術を開発してきた．精度を上げるために，離散点データとメッシュに加えて，曲面の法線方向のデータを加味する必要がある．この研究によって，直接，精度の高い3次元模型がつくられるようなインターフェースを開発した．

4．研究成果

本研究では，3Dプリンターの技術では達成できないような，金属を削り出して制作する高精度の3次元模型，離散群の極限集合，特異点理論，葉層構造，可積分系など，従来の方法では扱うことが困難であった対象の模型の制作を行ってきた．曲面の模型の精度についてであるが，基本的には，離散点データからメッシュを構成し，それぞれのメッシュについてよい近似をとって構成する方法がとられているため，理論的に誤差が生じるのはまぬかれない．したがって，精度を上げるために，どのようなメッシュ分割と，ファイル形式が適切かという問題が生じる．離散データから，単体分割された曲面を構成する標準的な方法は知られていないので，この点で，いくつかの理論的な側面を克服する研究を行った．精度を上げるために，離散点データとメッシュに加えて，曲面の法線方向のデータを加味する必要がある．この研究によって，直接，精度の高い3次元模型を制作できるようなインターフェースを開発した．

5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

- [1] T. Kohno, Homological Representations of Braid Groups and the Space of Conformal Blocks, Springer INdAM Series 19, DOI 10.1007/978-3-319-58971-8 査読有
- [2] T. Kohno, Quantum representations of braid groups and holonomy Lie algebras, Advanced Studies in Pure Mathematics 72 (2017), 117-144. 査読有
- [3] T. Kohno, Higher holonomy maps of formal homology connections and braid cobordisms, Journal of Knot Theory and Its

Ramifications, Vol. 26 (2016),

DOI: 10.1142/S0218216516420074 査読有
[4] T. Kohno and A. Pajitnov, Circle-valued Morse theory for complex hyperplane arrangements, Forum Math. 27 (2015), no. 4, 2113-2128,

DOI 10.1515/forum-2013-0032 査読有
〔学会発表〕(計8件)

[1] T. Kohno, Higher category extensions of holonomy maps and representations of braid cobordisms, The 13th Algebra Analysis Geometry Seminar, Kagoshima University, February 15, 2018.

[2] T. Kohno, Local systems on configuration spaces, KZ connections and conformal blocks, Topology of Arrangements and Representation Stability, Oberwolfach, January 15, 2018.

[3] T. Kohno, Representations of the category of braid cobordisms, 2017 KIAS Research Station Busan, June 15, 2017.

[4] T. Kohno, Higher category extensions of holonomy maps for hyperplane arrangements, Arrangements and beyond: Combinatorics, geometry, topology and applications, Centro de Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa, June 9, 2017.

[5] T. Kohno, Higher category extensions of holonomy maps for hyperplane arrangements, Summer Conference on Hyperplane Arrangements (SCHA) in Sapporo, August 9, 2016.

[6] T. Kohno, Higher category extensions of the holonomy maps of KZ connections, Workshop on Grothendieck-Teichmüller Theories, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, July 24, 2016.

[7] T. Kohno, Holonomy of braids and its 2-category extension, Configuration Spaces and Quantum Topology, The University of Tokyo, September 9, 2015.

[8] T. Kohno, Holonomy of braids and its 2-category extension, Integrability in Algebra, Geometry and Physics: New Trends, Congressi Stefano Franscini, July 13, 2015.

〔図書〕(計1件)
河野俊丈「結晶群」共立出版 2015 年, 196
ページ

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河野俊丈 (KOHNO, Toshitake)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：80144111

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()