

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 19 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2016

課題番号：15K13442

研究課題名(和文) エニオン凝縮と作用素環

研究課題名(英文) Anyon condensation and operator algebras

研究代表者

河東 泰之 (Kawahigashi, Yasuyuki)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：90214684

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：物質のトポロジカル相の間の gapped domain wall というものが物性物理で研究されているが、その数学的定義を与え、2015年の Lan, Wang, Wen の予想は正しくないことを示した。フル共形場理論のカップリング行列について、モジュラー不変性が成り立つのは表現論が自明な時である。2つの局所共形ネットが同じ場合、カップリング行列をかけた時の分解規則はフュージョンルールとして知られている。この「テンソル積」とその直和分解の構成を、二つの局所共形ネットが同じとは限らない場合に一般化した。これは gapped domain wall の合成にあたるものとなっている。

研究成果の概要(英文)：Gapped domain walls between topological phases of matters have been studied in condensed matter physics. We gave their mathematical definition and disproved a conjecture of Lan, Wang, and Wen made published in 2015. The coupling matrix of a full conformal field theory has modular invariance if it has a trivial representation theory. When we have two same chiral conformal field theories, the decomposition rules of products of coupling matrices have been studied as the fusion rules of modular invariants. We generalized the decomposition of the "tensor products" of full conformal field theories to the heterotic case. This amounts to a composition of gapped domain walls in the context of topological phases of matter.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環 共形場理論 テンソル圏 部分因子環 エニオン凝縮 トポロジカル相

### 1. 研究開始当初の背景

エニオン凝縮は物質のトポロジカル相の研究において近年注目を集めている現象である。近年のノーベル物理学賞もトポロジカル相の関連で出たばかりである。Bais-Slingerland (2009) によって行われた物性物理学におけるエニオン凝縮の研究、およびそれを数学的に整理した Kong (2014) の論文に現れる数学的構造は、作用素環論特に subfactor 理論において  $\alpha$ -induction として、Longo, Rehren, Xu, Bockenhauer, Evans, 河東らによって 1990 年代から研究されているものとまったく同じであるが、そのことは申請者によって初めて指摘されていた。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は物性物理学におけるエニオン凝縮に関する次の二つの論文

F. A. Bais, J. K. Slingerland, "Condensate induced transitions between topologically ordered phases", Phys. Rev. B 79, 045316 (2009).

L. Kong, "A mathematical theory of anyon condensation", Nucl. Phys. B 886 (2014) 436-482.

の内容を申請者の以下の3件の過去の論文と関係づけて、その物理的な意味を解明し、さらにこの数学的手法の応用を発展させることである。

J. Bockenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, "On  $\alpha$ -induction, chiral generators and modular invariants for subfactors", Commun. Math. Phys. 208 (1999), 429-487.

J. Bockenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, "Chiral structure of modular invariants for subfactors", Commun. Math. Phys. 210 (2000), 733-784.

J. Bockenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, Longo-Rehren subfactors arising from  $\alpha$ -induction, Publ. RIMS Kyoto Univ. 37 (2001), 1-35.

エニオンとは2次元に存在する粒子(状のもの)であり、エニオンとその凝縮は物性物理学の重要な研究対象である。

Bais-Slingerland の論文は Phys. Rev. B に出ているがこの雑誌はあまり数学的なものではなく、たとえば MathSciNet にもカバーされていない。これを引用している論文の大半は同じく Phys. Rev. B に出ている物理的な論文である。Kong の論文はこれらの論文に現れる数学的構造をテンソル圏の言葉で記述するというものである。いずれも物性物理学の論文として書かれているのだが、これらに出てくる数学的構造は、申請者の上記3本の論文と全く同じものである。

Bais-Slingerland の論文は作用素環のことは全く知らずに書かれており、Kong の論文も最初はそうだったが、こちらはpreprint 段階で申請者が指摘したため印刷版では「これらの数学的構造は作用素環に現れるものと同じであることが河東によって指摘された」というリマークがついている。しかしこのリマークがあるだけであり、作用素環との関連の数学的な意味は全く解明されていない。この関係を解明し、さらに応用を目指すことがこの計画の目的である。

### 3. 研究の方法

$\alpha$ -induction で知られている多くの結果はエニオン凝縮で知られている結果の数学的内容と正確に対応するが、それはあくまで数学的論理構造のレベルにとどまっており、作用素環側から見たそれらの物理的意味は知られていない。様々な具体例、特に格子模型の Hamiltonian を用いた例について詳しく検討することによって、物理的意味を理解することが第一である。これによって作用素環の新しい応用が開けると考えられる。

特に  $\alpha$ -induction では知られているが、エニオン凝縮の方では対応する結果が知られていないもの、特に modular invariant 行列に関係する結果の意味を考え直すことが重要である。

より具体的には、モジュラー不変行列を 2 次元フル共形場理論の文脈でとらえ、様々な操作をそこで研究する手法が鍵になる。

### 4. 研究成果

物質のトポロジカル相の間の gapped domain wall というものが物性物理で研究されているが、その数学的定義を新しく与え、2015 年の Lan, Wang, Wen の gapped domain wall の存在についての予想は正しくないことを示した。これらの著者は著名な物理学者

であり、彼らの論文も物理学のトップジャーナルである Phys. Rev. Lett. に最近掲載されたものである。

完全有理的な局所共形ネット2つからできるフル共形場理論のカップリング行列について、モジュラー不変性が成り立つのはフル共形場理論の表現論が自明な時であり、またその時に限ることが、Mueger, Longo, 河東によって知られている。一方2つの局所共形ネットが同じ場合、モジュラー不変行列を二つかけてもモジュラー不変性が保たれることは自明であり、その分解規則はモジュラー不変行列のフュージョンルールとして知られている。これについては、Evans-Pinto, Fuchs-Runkel-Schweigert の研究があり、フル共形場理論と、カイラル共形場理論の局所的とは限らない延長の関係に基づき、Q-system の braided product としての解釈が知られている。この「テンソル積」とその直和分解の構成を、二つの局所共形ネットが同じとは限らない場合に一般化した。すなわち、二つのモジュラーテンソル圏の直積上の local Lagrangian な Q-system を二つ取り、共通のモジュラーテンソル圏について「相対的に」テンソル積を取るということである。また物質のトポロジカル相の文脈では、これは gapped domain wall の合成にあたるものとなっている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

#### 〔雑誌論文〕(計2件)

- (1) Y. Kawahigashi, A relative tensor product of subfactors over a modular tensor category, Lett. Math. Phys. (印刷中).
- (2) Y. Kawahigashi, A remark on gapped domain walls between topological phases, Lett. Math. Phys. 105 (2015), 893-899.

#### 〔学会発表〕(計9件)

- (1) Y. Kawahigashi, Topological phases and subfactors, Subfactors and Mathematical Physics, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum (China), December 2016.
- (2) Y. Kawahigashi, Conformal field theory and operator algebras, Statistics, Quantum Information and Gravity, IPMU (Japan), September 2016.
- (3) Y. Kawahigashi, Subfactors, conformal field theory and modular tensor categories, Modular Categories--Their Representations, Classification, and

Applications, Casa Matemática Oaxaca (Mexico), August 2016.

- (4) Y. Kawahigashi, Relative tensor products of heterotic full conformal field theories, Recent Mathematical Developments in Quantum Field Theory, Oberwolfach (Germany), July 2016.
- (5) Y. Kawahigashi, A relative tensor product of subfactors over a modular tensor category, Operator Algebras and Quantum Field Theory, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Frascati (Italy), June 2016.
- (6) Y. Kawahigashi, Subfactors and gapped domain walls between topological phases, Noncommutative Geometry and Operator Algebras Spring Institute 2016, Universität Bonn (Germany), May 2016.
- (7) Y. Kawahigashi, From vertex operator algebras to operator algebras and back, Lie Algebras, Vertex Operator Algebras, and Related Topics, University of Notre Dame (U.S.A.), August 2015.
- (8) Y. Kawahigashi, From vertex operator algebras to operator algebras and back, Calabi-Yau Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics, 津田塾大学 (Japan), August 2015.
- (9) Y. Kawahigashi, From vertex operator algebras to local conformal nets and back, International Conference on Subfactor Theory in Mathematics and Physics, Qinhuangdao (China), July 2015.

#### 〔図書〕(計1件)

M. Bischoff, Y. Kawahigashi, R. Longo, K.-H. Rehren, Tensor categories and endomorphisms of von Neumann algebras (with applications to Quantum Field Theory), SpringerBriefs in Mathematical Physics Vol. 3, 2015.

#### 〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：

出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

河東 泰之 (KAWAHIGASHI, Yasuyuki)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：90214684