

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 12 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2016

課題番号：15K13445

研究課題名(和文)非可換調和振動子及びRabi模型のスペクトル曲線の代数的性質

研究課題名(英文) algebraic properties of spectral curves of Rabi model and non-commutative harmonic oscillators

研究代表者

廣島 文生 (HIROSHIMA, FUMIO)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：00330358

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では(1)量子Rabi模型と非可換調和振動子(NcHO)のスペクトル曲線族の交叉点数を決定し、(2)スペクトルゼータ関数を定義して複素平面上に解析接続し、(3)フルビッツ型スペクトルゼータ関数を同様に定義して、その零点の数論的考察を行うことが目的であった。量子Rabi模型のスペクトル曲線族の交叉点数の研究には大きな進展があった。ある条件下で交叉点数を完全に定めることができた。それは現在論文にまとめて投稿準備中である。また、スペクトルゼータ関数についてもその漸近挙動を求めることができた。これは海外で2回、国内で3回発表した。

研究成果の概要(英文)：In this research we planned to investigate (1) crossing of the spectral curves of the quantum Rabi model and non-commutative harmonic oscillators, (2) the meromorphic continuation of the spectral zeta function of the Rabi model to the whole complex plane, and (3) zeros of Hurwitz spectral zeta function for arithmetic point of view. We could progress the crossing of the spectral curves of the Rabi model and we are preparing a paper for submitting to some journal. We also made the asymptotic behavior of the spectral zeta function clear. We gave talks concerning this research twice overseas conferences and three times in domestic ones.

研究分野：作用素論、確率解析、場の量子論

キーワード：非可換調和振動子 スペクトル曲線 ゼータ関数 Rabi模型

様式 C - 19, F - 19 - 1, Z - 19, CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

量子 Rabi 模型は, I.I. Rabi によって 1936 年に導入された. 物理的には 2 レベル原子が一つの光子と相互作用している系を表す. 近年この模型は実験室で観測可能になり, 2012 年度のノーベル物理学賞はこの実験に貢献した Haroche と Wineland に授与された.

そのハミルトニアンは無次元ヒルベルト空間上の下から有界な自己共役作用素として実現されるが, その点スペクトル(=固有値)は結合定数の連続関数族になる. これらのスペクトル曲線族の交叉点が Rabi 模型の重要な研究課題になっている. 交差点は固有状態の縮退に対応している. さらに最近 D.Braak は Rabi 模型の縮退しない固有値を零点にもつ有理関数を構成して, 注目されるようになった.

一方で, 数論と深い関係にあり, 純粹に表現論的考察から作られた非可換調和振動子(NcH0)は Parmeggiani と若山によって導入された. NcH0 のスペクトルは離散スペクトルだけからなり, スペクトルゼータ関数が定義され, それが複素平面全体に有理関数として解析接続できることが示されている.

Rabi 模型と NcH0 は最近その類似性が数学的に示され, 両者のスペクトルを解明することが非常に野心的な対象になっている.

2. 研究の目的

本研究の目的は以下である.

- (1) 量子 Rabi 模型と NcH0 のスペクトル曲線族の交叉点数を決定する.
- (2) スペクトルゼータ関数を定義して複素平面上に解析接続して有理関数を全複素平面上に定義する.

(3) フルビッツ型スペクトルゼータ関数を同様に定義して, その零点の数論的考察を行う.

3. 研究の方法

(A) Rabi 模型のハミルトニアンは調和振動子に非可換係数がついたものと見なすことが出来る. この模型は廣川・廣島・Lorinczi で解析されたスピン・ボゾン模型の 1 モードバージョンと見なすことも出来る. 我々はこのスピンのボゾン模型と無限自由度量子系で培われた技術を 1 モード系に応用する. 数値計算から Rabi 模型のスペクトル曲線のおおよその形は分かっているので, それも足がかりにする.

一方で, NcH0 は Rabi 模型と類似な形になるが, 大きな違いは, Rabi 模型は生成消滅作用素で一次だが, NcH0 は二次になっていることである. Rabi 模型のスペクトル曲線族は相当に調べられている. しかし, NcH0 に対しても似たような性質が知られているが, こちらは対称性が乏しいために Rabi 模型程にはスペクトル曲線の規則性が見えない. そのため, 逆に興味がわいてくる. Bargmann 空間という複素平面上の 2 乗可積分空間に Rabi 模型を再定義し, 固有値問題を複素微分方程式系に書き直す. 解析関数解を得るために Poincare 差分方程式を経由して, Rabi 模型の固有値問題を解くことが多い. NcH0 に対しても, Bargmann 空間上で表現して Poincare 差分方程式を経由して, 固有値問題を解くことを試みる.

(B) Rabi 模型の固有値からスペクトルゼータ関数を定義する. このとき熱核の評価が大切であることがわかる. フルビッツ型スペクトルゼータ関数からゼータ正規化関数

を構成し, 全ての点スペクトルを零点にもつ有理関数を定義する. さらに, Braak の見つけた有理関数がフルビッツ型スペクトルゼータ関数を因子として含んでいることが予想される. これを示す.

4. 研究成果

量子 Rabi 模型のスペクトル曲線族の交叉点数の研究には大きな進展があった. ある条件下で交叉点数を完全に決めることができた. それは現在論文にまとめて投稿準備中である. また, スペクトルゼータ関数に関してもその漸近挙動を求めることができた. これらに関する結果は海外で 2 回, 国内で 3 回発表した.

- 1) [執筆中の論文について]執筆中の論文について Bargmann 表現を通じて複素微分方程式を導き出し, さらにそこから 3 項漸化式を導き出した. その結果, 多項式解(ジュリ解という)がスペクトル曲線の交差点と深く関係していることがわかった. またスペクトルゼータ関数に関しては作用素論的な考察からスペクトルゼータ関数がレゾルベントのトレースで書き表せるので, その表示を用いて漸近挙動を調べた. このとき単純なくりこみが必要であることもわかった.
- 2) [海外での発表について]QUTIS, Basque, Spain, 2016/9 で発表した. この研究会は Rabi 模型の実験系の研究会である. 数学者の発表も数件あった. Rabi ハミルトニアンに対して正準交換関係(CCR)を満たす作用素を構成した. それは時間作用素と言われている. 時間作用素の一般論及び階層性については, Arai and F. Hiroshima, Ultra-weak

time operators of Schroedinger operators, Ann. Henri Poincare 2017(in press)で発表した.

- 3) [海外での発表について]Aarhus Univ. 数物セミナー(デンマーク)2016/12 で発表した. この研究会ではスピンボゾン模型と Rabi 模型について, その類似点, 非類似点について発表した. スピンボゾン模型は無限自由度の模型であるが Rabi 模型は 1 自由度の模型である.
- 4) [国内での発表について]CREST 第 2 回全体会議 2016/12 では Rabi 模型に関するまとめの発表をした.
- 5) [国内での発表について]別府研究会 2016/2 及び日本数学会, 関数解析分科会 2016/9 では格子上のシュレディンガー作用素のスペクトルについて発表した. また一部の結果は論文 F. Hiroshima, J. Lorinczi and U Rozikov, Periodic solutions of generalized Schroedinger equations on Cayley trees, Commun. Stochastic Analysis 9 (2015), 283-296. にまとめて発表した. デルタ型のポテンシャルを持ったシュレディンガー作用素のスペクトルや, ケーリーグラフ上のシュレディンガー作用素のスペクトルについて発表した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者
には下線)

[雑誌論文] (計1件)

- 1) F. Hiroshima, J. Lorinczi and U
Rozikov, Periodic solutions of
generalized Schroedinger equations
on Cayley trees, Commun. Stochastic
Analysis 9 (2015), 283-296.

[学会発表] (計5件)

- 1) 廣島文生, Rabi 模型の数理, CREST 第2
回全体会議, 2016/12/22
- 2) 廣島文生, Resonance and threshold
for Schrodinger operators on
lattices, 別府研究会, 2016/2
- 3) 廣島文生, 格子上の離散シュレディン
ガー作用素のスペクトル, 日本数学会,
関数解析分科会, 関西大, 2016/9
- 4) 廣島文生, Time operator associated
with Schroedinger operators, QUTIS,
Basque, Spain, 2016/9
- 5) 廣島文生, Spin boson model and Rabi
model, Aarhus Univ. Math. Phys.
seminar 2016/12/7

[図書] (計0件)

[産業財産権]

出願状況 (計0件)

取得状況 (計0件)

[その他]

ホームページ等

[http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hiros
hima/index.html](http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hiros
hima/index.html)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

廣島文生 (HIROSHIMA, Fumio)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号: 00330358

(2) 研究分担者

佐々木格 (SASAKI, Itaru)

信州大学・工学系大学院・准教授

研究者番号: 50558161