

平成 30 年 6 月 7 日現在

機関番号：34315

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13447

研究課題名(和文) 確率論的方法による離散シュレーディンガー作用素の逆散乱理論

研究課題名(英文) Inverse scattering theory for Schroedinger operators by probabilistic method

研究代表者

磯崎 洋 (Isozaki, Hiroshi)

立命館大学・理工学部・授業担当講師

研究者番号：90111913

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：格子上で定義された離散化されたシュレーディンガー作用素に対してランダムに変化するポテンシャルの確率論的情報を、散乱現象を記述する基本的物理量である散乱行列から導くことを目的とする。近似の度合いを示すパラメータとしてメッシュ幅をとり、メッシュ幅がゼロに近づくときの漸近近似としてポテンシャルの確率分布を記述することを目標とする。その際に必要になるレゾルベントのメッシュ幅に関する一様評価が自由ハミルトニアンに対して得られた。さらに離散モデルのレゾルベントの連続モデルのレゾルベントへの収束を論じるため、通常の離散化とは異なる新しい近似スキームを考案した。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research is to derive probabilistic informations of potentials for discrete Schroedinger operators defined on lattices from the knowledge of the S-matrix, the fundamental physical quantity describing the scattering phenomena. The mesh size of the lattice is used as a parameter of approximation, and the ultimate goal is to obtain probabilistic distribution of the potential randomly distributed on lattices. We have obtained estimates of the resolvent of free discrete Schroedinger operator uniform with respect to the mesh size. We are interested in the convergence of the resolvent of the discrete model to that of the continuous model, which proposes a new challenging problem for Schroedinger operators. We have found a new approximation scheme which possibly provides us with the solution. We also have another idea of approximation.

研究分野：数理物理学

キーワード：逆散乱理論 シュレーディンガー作用素 S行列 確率分布

1. 研究開始当初の背景

ランダムなポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素の研究はすでに長い歴史を持ち物理学の立場からの研究は(準)束縛状態、散乱状態、双方に対して多くの研究がなされてきた。数学的研究もすでにかんりの歴史をもつが、これまでには粒子の局在化の問題が多く研究され、散乱状態の研究はほとんどなかった。しかし、散乱実験は本来確率論的にしか把握できない標的に粒子を衝突させて得られたデータを確率論的に解釈するものであり、確率論的な観点からの散乱現象の研究は極めて重要である。

Lassas-Paivarinta-Saksman による論文

“Inverse scattering problem for a two-dimensional random potential, *Comm. Math. Phys.* (2008), 669-703, は2次元におけるシュレーディンガー作用素に対してS行列の高エネルギー極限からランダムポテンシャルの相関係数を導いたものであるが、この方面で初めて得られた数学的結果であり、重要なものである。2次元に限定されていること、数学的に多くの困難点を乗り越えて結果が導かれていること、等を見れば、この方面の数学的研究の重要性が明瞭に浮かび上がってくる。ランダムな現象は離散モデルによって理解しやすくなることがしばしばある。離散シュレーディンガー作用素に対して同様の問題を考えることは散乱現象の数理的理解に新たな視点をもたらす。シュレーディンガー作用素の連続モデルと離散モデルはいくつか部分においては平行した性質をもっているが、両者の関係については未知の部分が多く、離散モデルの研究は連続モデルに対するものをそのまま移し替えられるものではない。離散モデルは連続モデルと並んで独立した価値をもつ研究対象であると考えられ、多くの研究がなされるべきである。そのための基礎知識を得るための突破口としてもこの問題は多くの良い課題を提供するものと考えられる。

2. 研究の目的

ポテンシャルがランダムに変動する離散シュレーディンガー作用素の連続スペクトルを研究する。散乱行列の表示からポテンシャルの確率論的情報を引き出す。ポテンシャルの分布はガウシアンであるとし、相関係数を散乱行列から引き出すことを目標とする。その中において離散シュレーディンガー作用素に関連した問題を見極め、新しい課題と将来の展望を探求する。

3. 研究の方法

研究の経緯と合わせて研究方法を説明する。シュレーディンガー作用素の連続モデルに対しては、その連続スペクトルが0から無限大にいたる半直線となり、高エネルギー領域を考えることができる。シュレーディンガー作用素の連続モデルに対しては高エネルギー

領域における漸近評価が重要であった。離散モデルはその連続スペクトルが有限区間となる。そのため、高エネルギーに対応する概念を探ることが重要となる。離散シュレーディンガー作用素の逆散乱問題の最初の方法は散乱行列を解析接続することにより複素領域での高エネルギー極限を考えることであった(H. Isozaki and E. Korotyaev, *Inverse problems, trace formula for discrete Schroedinger operators*, *Ann. Henri Poincare*, 13 (2012), 751-788)。そこで複素高エネルギー極限を最初に考えたが極限の計算において十分な結果が得られなかった。そこで新たな意味のあるパラメータとして離散格子の幅(メッシュサイズ)を導入した。

メッシュサイズを0に収束させたとき、有界区間であった連続スペクトルは半無限区間に収束する。したがって高エネルギー領域における漸近展開に相当することがメッシュサイズを0に近づけたときの漸近近似として得られるであろう。シュレーディンガー方程式における小さいパラメータによる漸近近似の問題としてはプランクの定数による半古典近似の問題があるが、離散シュレーディンガー方程式においてはそれに類似のものとしてメッシュサイズを小さくするときの漸近近似を考えることができる。メッシュサイズを小さくするときの漸近近似の問題は以前からあり地道な研究が続けられている。微分幾何学においてもコンパクトな多様体を離散的なグラフで近似することにより、ラプラシアン固有値を離散グラフの固有値によって近似する、あるいはラプラシアン固有値を離散グラフ上のラプラシアンのレゾルベントによって近似するなどの研究がなされている。しかし連続スペクトルの場合には対応する研究は見当たらず、多くの困難が潜んだ問題であった。

連続スペクトルの研究においてはレゾルベントの複素パラメータをスペクトルの点に収束させたときのレゾルベントの境界値の評価の問題が重要である。この問題は最近大きく進展しており、私自身も物理的に重要な格子を多数含むあるクラスの離散シュレーディンガー作用素に対してこの研究を行っており、逆散乱問題に応用している。そこで出発点として必要なのはメッシュサイズに関して一様な離散シュレーディンガー作用素のレゾルベントの一様評価であった。この問題は全く先行研究を見出すことができず、暗中模索であったが、Isozaki-Korotyaevの上述の論文の方法を適用することに1,2次元のポテンシャルを持たないシュレーディンガー作用素に対してメッシュサイズに関して一様な評価のある種の関数空間に関して証明することができた。

次の目標は散乱行列のメッシュサイズに関する展開を求めることである。そのときポテンシャルをもった離散シュレーディンガ

一作用素のポテンシャルに関する一様評価が必要となる。ここに困難があり、連続モデルの場合に類似の結果はまだ得られていない。しかしポテンシャルにメッシュサイズに対応したパラメータを掛けることによりメッシュサイズと共に小さくなるようなポテンシャルに対してはレゾルベント評価、散乱行列の表示、漸近展開等を標準的な摂動展開として得ることができる。この部分は後進のための課題として現在残してある。

ここにおいて考えるべきことは、メッシュサイズを小さくしたときに離散シュレーディンガー方程式の解が何に収束するか、という問題である。対応する連続モデルに収束するのが当然のように思われるが、収束すること自身が自明ではなく、収束先が連続モデルであるという保証もない。これは意外に知られていない研究上の盲点であった。ここは本質的な困難を含む問題で在来の手法からは解決策を見出すことが非常に難しかったが、多くの文献を探る中で数値解析において重要な(これもあまり知られていない)進展がなされていることが分かった。連続モデルを近似する離散モデルとして、例えばユークリッド空間上のラプラシアンに対しては正方格子による近似が通常考えられるが、時間依存シュレーディンガー方程式の非線形問題においてはそれでは収束しないことの証明と新たな近似スキームの提唱がなされている。このことを考慮して最近、進展をみることができた。ポテンシャルを含まない自由シュレーディンガー方程式に対して新たな近似スキームを導入することにより、スペクトルパラメータまで考慮した関数空間において、離散近似レゾルベントは連続モデルのレゾルベントに弱収束することが示される。このことにより、シュレーディンガー作用素の連続モデルの離散近似として通常の正方格子の離散モデルではなく新しい離散近似を考えるべきこととそのための関数空間の設定が示唆された。その離散近似は我々が現在持っている知識で十分に研究可能なものであり、新たな研究対象として興味深く、現在研究を行っている。

4. 研究成果

シュレーディンガー作用素の連続モデル、離散モデルの双方に関して散乱行列の研究、散乱行列からの摂動項の再構成の研究を行った。連続モデルに関しては散乱行列に関するトレース公式の新たな表示法を発見し共鳴状態とトレース公式との関連を明らかにした(4の文献(1))。また離散スペクトルデータからの逆問題として回転面のガウス曲率からの再構成の問題を考えミンコフスキーの問題を逆スペクトル理論の立場から解決した(4の文献(3))(4))。正方格子の離散シュレーディンガー作用素に対して散乱行列からポテンシャルを再構成する逆問題を解決した(4の文献(6))。

さらに物理的に重要な格子を多数含む一般的な格子のシュレーディンガー作用素の連続スペクトルを研究した(4の文献(5))。無限遠において双曲空間に漸近するような多様体上において散乱行列から多様体を再構成する逆問題を解決した(4の文献(2))(8))。熱伝導体において内部の介在物の位置を表面上の熱分布から推定する逆問題を解決した(4の文献(7))。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

- (1) H. Isozaki and E. Korotyaev, New trace formulas in terms of resonances for three-dimensional Schroedinger operators, Russian Journal of Mathematical Physics, 25 (2018), 27-43. DOI 10.1134/S106192081801003X (査読有)
- (2) H. Isozaki, Y. Kurylev and M. Lassas, Conic singularities, generalized scattering matrix, and inverse scattering on asymptotically hyperbolic surfaces, J. Reine Angew. Math. 724 (2017), 53-103. DOI 10.1515/crelle-2014-0076 (査読有)
- (3) H. Isozaki and E. Korotyaev, Inverse spectral theory and the Minkowski problem for the surface of revolution, Dynamics of PDE, 14 (2017), 321-341 DOI 10.4310/DPDE.2017 (査読有)
- (4) H. Isozaki and E. Korotyaev, Global transformations preserving Sturm-Liouville spectral data, Russian J. of Math. Phys. 24, (2017), 51-68, DOI 10.1134/S106192081701004 (査読有)
- (5) K. Ando, H. Isozaki and H. Morioka, Spectral properties of Schroedinger operators on perturbed lattices, Ann. Henri Poincare, 17 (2016), 2103-2171, DOI 10.1007/s00023-015-0430-0 (査読有)
- (6) H. Isozaki and H. Morioka, Inverse scattering at a fixed energy for discrete Schroedinger operators on the square lattice, Ann. I' Inst. Fourier Vol 65 No 3 (2015), 1153-1200. DOI 10.5802/aif.2954 (査読有)
- (7) P. Gaitan, H. Isozaki, O. Poisson, S. Siltanen and J. Tamminenn, Inverse problems for time dependent singular heat conductivities - Multi-dimensional case, Comm. in PDE.40 (2015), 837-877, DOI. 10.1080/03605302.2014.992533 (査読有)

- (8) H. Isozaki, Y. Kurylev and M. Lassas, Inverse scattering on multi-dimensional asymptotically hyperbolic orbifold, Contemporary Mathematics 640 (2015), 71-85, DOI.org/10.1090/conm/64/12840 (査読有)

[学会発表](計14件)

- (1) Seminar in geometric analysis, University of Helsinki, Inverse scattering on graphen - vertex model and edge model (2018) 磯崎洋
- (2) 作用素論セミナー キャンパスプラザ京都第4講義室 3題 漸 Weyl の m-関数 Minkowski の問題 六角格子(2018) 磯崎洋
- (3) Mathematical seminar in Aarhus University (Denmark) Inverse scattering on perturbed periodic lattices (2018) 磯崎洋
- (4) Tosio Kato Centennial Conference 東京大学数理科学研究科 Inverse scattering on graphen --- Vertex model and edge model (2017) 磯崎洋
- (5) 数理研研究集会 低次元モジュライ空間の幾何学 Inverse scattering on non-compact manifolds with general metric (2016) 磯崎洋
- (6) 数理研共同研究 微分方程式に対する散乱理論の展開 逆散乱理論からの2つの話題 II Stackel 計量と複素角運動量 (2016) 磯崎洋
- (7) 数理研共同研究 微分方程式に対する散乱理論の展開 逆散乱理論からの2つの話題 I 格子上の逆散乱とネットワークの幾何 (2016) 磯崎洋
- (8) Maxwell 方程式と Betti 数、作用素論セミナー (2016) 磯崎洋
- (9) Mathematical aspects of quantum mechanical many-body problems、理化学研究所セミナー (2016) 磯崎洋
- (10) Inverse scattering for Schroedinger operators on perturbed periodic lattices, RIMS シンポジウム 偏微分方程式の逆問題とその応用の新展開 (2016) 磯崎洋
- (11) Asymptotic properties of solutions to the elastic equation in a half-space
Control of PDE 's and Applications, CIRM Marseille (2015) 磯崎洋
- (12) Modern theory of wave equations, Semiclassical analysis : Spectral theory and resonances, Wien Schroedinger Institute, Inverse scattering on non-compact manifolds with general metric (2015) 磯崎洋
- (13) Inverse scattering for Schroedinger operators on perturbed

lattices, Semiaire Cergy-Pontoise (2015) 磯崎洋
Spectral and analytic inverse problems, Institute Henri Poincare, Paris, Inverse scattering on non-compact manifolds with general metric (2015) 磯崎洋

6. 研究組織

(1) 研究代表者

磯崎 洋 (Isozaki Hiroshi)

立命館大学・理工学部・授業担当講師

研究者番号：9 0 1 1 1 9 1 3