

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 1 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2016

課題番号：15K13448

研究課題名（和文）渦が織りなす遷移的秩序

研究課題名（英文）Transient order weaved by vortex

研究代表者

鈴木 貴（Suzuki, Takashi）

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：40114516

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：木星大赤斑のように乱流中に長時間にわたって秩序構造が現出することがある。2次元の流では多数点渦の平均場の作る平衡状態と準平衡状態がその起源である一方、平均場と個別粒子の間に「循環的階層」と呼ばれる構造があることが知られてきた。本課題は非線形解析学と非平衡統計力学の融合研究であり、循環的階層が動力学のレベルまで及んでいることを数学的に証明する一方、パッチモデルと適合する形で準平衡から平衡に至る緩和時間での点渦平均場を記述する数理モデルを導出したものである。

研究成果の概要（英文）：Ordered structures are widely observed for long term in turbulence, e.g., the great red spot on Jupiter. It has been known that in the two dimensional flow, this phenomena is due to the quasi-equilibria and equilibria arising in the mean field of many point vortices, while there is a recursive hierarchy through the particles and their mean field. This project is a fusion of nonlinear analysis and non-equilibrium statistical mechanics. We have rigorously proven the recursive hierarchy in the dynamical level, and also derived a mathematical model for the point vortex mean field in the relaxation time compatible to the patch and equilibrium models.

研究分野：数学解析

キーワード：点渦、ボルツマン・ポアソン方程式、爆発機構の量子化、循環的階層、非局所項、平均場理論、準平衡緩和方程式

### 1. 研究開始当初の背景

木星大赤斑のように、乱流中に長時間にわたって秩序構造が現出する場合があります、2次元的な流れでは多数点渦の平均場の作る平衡状態と準平衡状態がその起源であると考えられている。一方、平衡状態では平均場と個別粒子の間には「循環的階層」と呼ばれる構造があることが知られていて、このことは非線形解析学と非平衡統計力学の研究対象が裏表の関係にあることを示している。それぞれの研究はこれまで個別に深化してきたが、「渦」をキーワードとすると数学と物理学という枠組みを越えた構造が視野に入る。両者の融合研究を進めることが必要である。

### 2. 研究の目的

点渦の平衡状態における循環的階層とは、粒子の配置を決めるキルヒホッフのハミルトニアンが、多数粒子の平均場が凝縮する場所も決めていることを指す。さらにこれらの凝縮状態は  $\delta$  を係数とするデルタ関数の和であり、このことを量子化する爆発機構という。本研究はこのような顕著な現象を、多強度粒子系、渦糸、量子渦に対して確認し、さらに深く力学的安定性を表すモース指数について検証する。次に、渦の作る平均場の動態を理論的に解明するため、その第1歩として準平衡状態から平衡状態への緩和方程式を導出し、その数理構造を明らかにする。

### 3. 研究の方法

(1) 循環的階層、量子化する爆発機構のように物理的実態に由来する顕著な現象に対して、モデリングに根差した数学解析を展開し、非線形、非平衡の数理モデルに内在する数学的な構造を明らかにする。特にスケール不変性と変分構造を用いて、解の爆発や安定について明確な知見を打ち立てる。

(2) 数学解析を進めるため、必要に応じて簡略化した数理モデルを分析し、その数理構造を明確にするとともに解析技術の基盤を確立する。

(3) 点渦モデルをパッチモデルの極限と両

立する形で導出し、準平衡から平衡への平均場近似を数学的に明確にする。

### 4. 研究成果

(1) ボルツマン・ポアソン方程式を基準として、モデリングと数学解析によって多くの点渦系が平衡状態で作り出す秩序構造を解明した。特にミニマックス原理を用いた固有値の漸近挙動を詳細に解析し、爆発解のモース指数と爆発点の位置を規定するハミルトニアン臨界点のモース指数が正確に対応することを突き止めた。本成果は多点爆発や変数係数の場合も含めたこれまでの研究の一つの到達点であり、今後の基準となるものである。

(2) エントロピー生成最大原理を用い、準平衡から平衡に至るまでの緩和時間での古典的点渦平均場動態を研究し、パッチモデルと点渦モデルのそれぞれの緩和時間、平衡状態を記述する4つが極限移行によって完全につながる形で点渦緩和方程式を導出するとともに、非局所項によってエネルギー保存、質量保存、エントロピー増大の3つの法則が成り立つこと、解の爆発を逆温度が制御していることを明らかにして小正準統計の基準と合致していることを確立した。

(3) 循環的階層の視点からより簡明で正準集団を記述する Smoluchowski-Poisson 方程式の collapse 動態を研究し、スケールリングと確率測度に関する concentration compactness という簡明なツールによって、量子化された collapse が衝突する様子が正確に記述できることを明らかにした。

(4) 量子渦のモデリングに動機づけられて、非線形 Schrödinger 方程式の大域ダイナミクスを研究し、2つの大きく異なるソリトン族を含むエネルギー空間領域での解の分類と記述に成功した。

(5) 2次元の点渦系平衡平均場方程式に触発されて同様の構造を持ち、プラズマ物理で使われる高次元の非線形楕円型方程式を解析し、爆発解の解の族に対する質量量子化や  $\sup + \inf$  不等式などの基本的な性質を確立した。

(6) 本研究によって動的平均場理論のモデリング法が確立する一方、物理的背景を抑えることで数学解析の基礎技術が格段に進展した。その応用として多強度系の爆発解の精密挙動を解明して Trudinger-Moser 不等式の端点での有界性と達成関数の存在や非存在、自明解を持つ場合の汎関数レベルセットの変形とモース理論など、非線形楕円型理論に新しい視点をもたらされて研究課題終了後も活発に研究が進められている。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 17 件)

T. Suzuki, "Blowup in Infinite time for 2D Smoluchowski-Poisson equation." Differential Integral Equations. 査読有 Vol.28. 2015, pp601-630.

T.Suzuki, "Almost collapse mass quantization in 2D Smoluchowski-Poisson equation." Math. Meth. Appl. Sci. 査読有, Vol.38,2015, pp3587-3600. DOI:10.1002/mma/3602

K. Fujimoto, M. Tsubota, "Bogoliubov-wave turbulence in Bose-Einstein condensates." Phphysical Review A, 査読有, Vol.91, 2015. pp053620(1-12) DOI:10.1103/PhysRevA.91.053620

K. Fujimoto, M. Tsubota, "Direct and inverse cascades of spin-wave turbulence in spin-1 ferromagnetic spinor Bose-Einstein condensates." Physical Review A, 査読有, 2016, Vol.93. pp33620 DOI:10.1103/PhysRevA.93.033620

S. Yui, M. Tsubota, "Counterflow quantum turbulence of He-II in a square channel. :Numerical analysis with nonuniform flows of the normal fluid. Physical Review B, 査読有, 2015. pp18454 ( 1-12 ) DOI:10.1103/PhysRevB.91.184504

S. Yui, K. Fujimoto, M.Tsubota, "Logarithmic velocity profile of quantum turbulence of superfluid 4He." Physical Review B. 査読有, 2016, Vol.92.pp224513(1-5)DOI:10.1103/PhysRevB.92.224513

Hiroshi Ohtsuka, "On the fine behaviors of the eigenvalues of the linearized Gel'fand problem and its applications." 数理解析研究所講究録, 査読無, 2015. Vol.1974. pp53-97.

Masahito Ohta, Takuhiro Yamaguchi, "Strong instability of standing waves for nonlinear Schrodinger equations with double power nonlinearity." 査読有, 2015. pp49-58

Kenji Nakanishi and Tristan Roy, "Global dynamics above the ground state for the energy-critical Schrodinger equation with radial data." , Commun. Pure Appl. Anal. 査読有, 2016. Vol.15. pp2023-2058 DOI:10.3934/cpaa.2016026

Yuki Naito, Takashi Suzuki, Yohei Toyota, "A priori bounds for superlinear elliptic equations with semidefinite nonlinearity." Nonlinear Anal. 査読有, Vol.151. 2017. pp18-40 DOI:10.1016/j.na.2016.11.016

Yuki Naito, Mervan Pasic, Satohi

Tanaka, "Rectifiable and nonrectifiable solution curves of half-linear differential systems." Mathematica Slovaca, 査読有. 2017 印刷中.

Shinich Ikawa, Makoto Tsubota, "Coflow turbulence of superfluid 4He in a square channel: Vortices trapped on a cylindrical attractor." Physical Review B. 査読有, Vol.93. 2016. pp184508 (1-8). DOI : 10.1103/physRevB.93.184508

Che-hsiu Hsuen, Wen-Chin Wu, Makoto Tsubota, "Quantum crystallography of Rydberg-dressed Bose gases on a square lattice." Physical Review A, 査読有. 2017、Vol.95. 2017、pp013631(1-5) DOI:10.1103/PhysRevA.95.013631

S.Ikawa, M.Tsubota, "Quantum Turbulence in Coflow of Superfluid 4 He." Journal of Low Temperature Physics. 査読有. Vol.183, 2016. pp230-237

Tomohiko Sato, Takashi Suzuki, "Morse indices of the solutions to the Liouville-Gel'fand problem with variable coefficients." , Funkeialaj Ekavacioj, 査読有. Vol.---, 2017. 印刷中

K.Sawada, T.Suzuki, "Relaxation theory for point vortices." Vortex Structures in Fluid Dynamic Problems. INTECH 2017 Chapter 11. 査読有. 2017. pp205-224

T. Suzuki, R. Takahashi, "Critical blowup exponent to a class of semilinear elliptic equations with constraints in higher dimensions-local properties." Ann. Mate. Pura Appl., 査読有, Vol.---、印刷中 DOI : 10.1007/s10231-015-0508-9

[学会発表](計 23 件)

鈴木 貴. 点過系緩和モデルの時間大域挙動～正準集団と小正準集団, 応用非線形偏微分方程式の展開. 2016 年 3 月 27 日. 大阪大学(大阪府・豊中市)

坪田 誠. 非一様量子乱流, 日本物理学会(招待講演), 2016 年 3 月 20 日. 東北学院大学(宮城県・仙台市)

佐藤 友彦, 鈴木 貴. Morse indices of the solutions of the Liouville-Gel'fand problem with variable coefficients. 日本数学会 2016 年度年会. 2016 年 3 月 17 日, 筑波大学(茨城県・つくば市)

鈴木 貴. 2D Smoluchowski-Poisson 方程式～subcollapse の衝突条件, 日本数学会 2016 年度年会. 2016 年 3 月 17 日, 筑波大学(茨城県・つくば市)

Masahito Ohta. Stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with cubic nonlinearity. Workshop on

“Wuasilinear and nonlocal nonlinear Schrödinger equations.” (招待講演) 2015年10月1日, Wolfgang Pauli Institute Vienna, Austria.

太田 雅人, Instability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations in a degenerate case. 金沢解析研究会 2015 (招待講演) 2015年8月27日. 金沢大学サテライト・プラザ(石川県・金沢市)

Masahito Ohta, Stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with cubic nonlinearity. The 10<sup>th</sup> International ISAAC Congress. (招待講演). 2015年8月4日. University of Macau, China

T. Suzuki, Quantized blowup mechanism for 2D Smoluchowski-Poisson equation, PDE Seminar, Mannheim University, 2015年5月5日

〔図書〕(計 3 件)

鈴木 貴, 大塚 浩史, 朝倉書店, 楕円型方程式と近平衡力学系(上)循環するハミルトニアン. 2015, 301

鈴木 貴, 大塚 浩史, 朝倉書店, 楕円型方程式と近平衡力学系(下)自己組織化のポテンシャル. 2015, 311

T. Suzuki, Atlantis Press, Mean Field Theories and Dual Variation, 2015, 444

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 貴 (SUZUKI, Takashi)  
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授  
研究者番号: 40114516

(2) 研究分担者

坪田 誠 (TSUBOTA, Makoto)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 10197759

中西 賢次 (NAKANISHI, Kenji)  
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 40322200

(3) 連携研究者

( )

研究者番号:

(4) 研究協力者

( )