

平成 30 年 6 月 6 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13449

研究課題名(和文) 圧縮性粘性流体方程式の境界層の漸近解析

研究課題名(英文) Asymptotic analysis of boundary layers for viscous compressible Navier-Stokes equations

研究代表者

隠居 良行 (Kagei, Yoshiyuki)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：80243913

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：圧縮性Navier-Stokes方程式の解の時間無限大およびマッハ数ゼロの極限過程における境界層の数理構造の解明を目指して、全空間上の圧縮性Navier-Stokes方程式の解の時間無限大における漸近展開の展開第2項を導出した。また人工圧縮系および非圧縮Navier-Stokes方程式の定常解まわりの線形化作用素のスペクトルに関して、人工的マッハ数が小さいときに人工圧縮系の虚軸近傍のスペクトルは、非圧縮系のスペクトルの摂動で与えられる部分と圧縮系特有の部分とに分解されることを示した。このことから、非圧縮系の安定な定常解が人工圧縮系の定常解としても安定であるための判定条件を導いた。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this project is to study the structure of boundary layers in limiting process of the large time behavior of solutions and the zero Mach number limit for the compressible Navier-Stokes equations. We derived the second order term of the asymptotic expansion of solutions in large time for the Cauchy problem on the whole space. We also study the spectral relations of the linearized operators around stationary solutions between the artificial compressible system and the incompressible Navier-Stokes system. It was shown that the spectrum for the artificial compressible system near the imaginary axis is decomposed into a part given by a perturbation of the spectrum for the incompressible system and a part arising from the compressible aspect of the system. We then established a sufficient condition so that a stable stationary solution of the incompressible system is also stable as a solution of the artificial compressible system.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：圧縮性Navier-Stokes方程式 人工圧縮系 特異摂動 スペクトル解析 マッハ数

### 1. 研究開始当初の背景

圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解は時間無限大において、粘性拡散する非圧縮流の部分と波（音波）が拡散しながら伝播していく拡散波動との重ね合わせで記述されることが知られているが、境界をもつ半空間の場合はさらに拡散波動と領域の境界の相互作用による境界層が出現し、双曲-放物型に特有の非線形現象が現れることが予想されている。一方、音波の伝播速度の逆数に相当するマッハ数をゼロとする極限において放物型である非圧縮性 Navier-Stokes 方程式が得られるが、有界領域の場合には極限過程において音波の伝播による境界層の発生が知られている。これらの極限過程において発生する境界層はともに拡散波動と境界との非線形相互作用によるもので著しい類似性をもつが、境界層の数理構造の詳細は知られていない。

### 2. 研究の目的

本研究では、圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の時間無限大およびマッハ数ゼロの極限問題の解析をおこなうことにより、上述の境界層の数理構造の解明を試み、境界層発生に伴う双曲-放物型から放物型への特異極限問題に有効な数学解析手法の確立を目指すことを研究の主目的とする。

### 3. 研究の方法

(1) 全空間および半空間における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の静止状態のまわりの解の時間無限大における漸近挙動の主要部は線形化方程式の解の主要部で与えられることが分かっているが、非線形性の影響が現れる高次漸近展開はいまだ得られていなかった。非圧縮性 Navier-Stokes 方程式など2階放物型の場合は、 $t^{-1/2}$ の冪で漸近展開され、全空間問題の場合は圧縮性 Navier-Stokes 方程式も同様で、非線形性の影響が現れる漸近展開の第2項は主要項よりも少なくとも  $t^{-1/2}$  だけ速く減衰することが予想される。ところが、半空間上の圧縮性 Navier-Stokes 方程式の場合は  $t^{-1/4}$ の冪で展開されることが予想され、特に漸近展開の第2項には双曲-放物型の連立系であるがゆえに生じる拡散波動と領域の境界との非線形相互作用による拡散波動的境界層の出現を示唆する結果が得られている。本研究では漸近展開の第2項を導出し、拡散波動的境界層の数理構造の解明および境界があるゆえに生じる双曲-放物型連立方程式系と放物型方程式系との差異を明らかにすることを目指して研究を行った。

(2) 人工圧縮系と非圧縮 Navier-Stokes 方程式の定常解のまわりの線形化作用素のスペクトルの関係における境界層の影響を調べた。人工圧縮系は非圧縮 Navier-Stokes 方程式の連続の方程式に小さいパラメータ（人工的マッハ数）を乗じた圧力の時間微分を加えて得られる双曲-放物型方程式系であり、人

工圧縮系と非圧縮 Navier-Stokes 方程式は同じ定常解の集合をもつ。人工的マッハ数ゼロの極限で非圧縮 Navier-Stokes 方程式が得られるが、この極限は、圧縮性 Navier-Stokes 方程式におけるマッハ数ゼロの極限と同様の特異極限となっており、極限過程で境界層が現れる。本研究では圧縮性 Navier-Stokes 方程式におけるマッハ数ゼロの極限過程の解析の第一歩として、人工圧縮系の人工的マッハ数ゼロの極限過程を定常解の安定性の観点から調べた。

研究課題の解析のためには、非線形偏微分方程式に対する関数解析的手法、実解析的手法、無限次元力学系理論などのさまざまな手法が必要であり、関連する論文の精読や偏微分方程式関係の図書の購読により解析手法の研究、現状の分析、研究の動向に関する情報収集を行った。

毎週1回「九州関数方程式セミナー」に偏微分方程式の研究者を招へいし、セミナー講演を通じて研究討論、意見交換を行った。

偏微分方程式関連の研究集会を開催、あるいは集會に参加するなどして、国内外の非線形偏微分方程式の研究者との研究交流を行い、最新の手法、視点、研究の動向に関する情報収集を行った。平成27年度～29年度に開催した研究集会は以下のとおりである。

・「九州における偏微分方程式研究集会」開催地：福岡（H28年～H30年、毎年1月開催）

・「若手のための偏微分方程式と数学解析」開催地：福岡（H28年～H30年、毎年2月開催）

「Ito Workshop on Partial Differential Equations」開催地：福岡（H27年～H29年、毎年8月開催）

「Saga Workshop on Partial Differential Equations」開催地：佐賀（H28年～H30年、毎年3月開催）

「Okayama Workshop on Partial Differential Equations」開催地：岡山（H28～H29年、毎年10月開催）

「国際研究集会 German-Japanese Workshop on Partial Differential Equations」開催地：Konstanz（ドイツ）、2017年3月

「国際研究集会 Kyushu Univ.-PSTech-SJTU joint workshop on PDEs and related topics」開催地：浦項（韓国）、H29年4月

### 4. 研究成果

(1) 全空間上の圧縮性 Navier-Stokes 方程式の静止定常解のまわりの解の時間無限大における漸近挙動を考察した。静止定常解の摂動の時間無限大における漸近的主要部は線形化問題の解で与えられることが知られていた。本研究では、摂動の時間無限大における漸近展開の展開第2項を導出し、第2項に方程式のもつ非線形性が現れることを示した（下記論文[3]）。

(2) 人工圧縮系および非圧縮 Navier-Stokes 方程式の定常解のまわりの線形化作用素のスペクトルの関係を調べた。両者の定常解まわりの線形化作用素のスペクトルを考察し、人工的マッハ数が十分小さければ、人工圧縮系の虚軸近傍のスペクトルは、非圧縮系のスペクトルの摂動で与えられる部分と圧縮系特有の部分とに分解されることを示した。このことから、人工圧縮系の安定な定常解は非圧縮 Navier-Stokes 方程式の定常解としても安定であることを示した。逆に、非圧縮 Navier-Stokes 方程式の安定な定常解は、その速度場がある変分的条件を満たせば、十分小さい人工的マッハ数に対して人工圧縮系の定常解としても安定であることも示した(下記論文[2])。さらに下記論文[1]において、論文[2]の変分的条件をより詳細に調べて、試験関数として速度場のポテンシャル流部分のみを考えればよいという条件に改良した。この改良により速度場が必ずしも小さくない定常解である回転流体層に生じるテイラー渦を応用例として考えることが可能となり、人工圧縮系を用いて層流(クウェット流)からの分岐周期的渦パターン(テイラー渦)を数値計算により得ることができることがわかった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

[1] Yoshiyuki Kagei, Takaaki Nishida and Yuka Teramoto, On the spectrum for the artificial compressible system, *J. Differential Equations*, 264 (2018), no. 2, pp. 897--928. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.026> 査読有

[2] Yoshiyuki Kagei and Takaaki Nishida, On Chorin's method for stationary solutions of the Oberbeck-Boussinesq equation, *J. Math. Fluid Mech.*, 19 (2017), no. 2, pp. 345--365. DOI: 10.1007/s00021-016-0284-3 査読有

[3] Yoshiyuki Kagei and Masatoshi Okita, Asymptotic profiles for the compressible Navier-Stokes equations on the whole space, *J. Math. Anal. Appl.*, 445 (2017), no. 1, pp. 297--317. <http://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.07.024> 査読有

[学会発表](計 62 件)

[1] 隠居良行, Stability and bifurcation analysis of the compressible Navier-Stokes equations, 東北大学 理学部数学教室 談話会, 2018 年 1 月 15 日

[2] Yoshiyuki Kagei, Bifurcation of the compressible Taylor vortex, RIMS Workshop on "Theory of Evolution Equation and Mathematical Analysis of Nonlinear Phenomena", RIMS, Kyoto

University, Oct. 18--20, 2017

[3] Yoshiyuki Kagei, Bifurcation of the compressible Taylor vortex, Seminar at Center for Partial Differential Equations and their Applications, September 4, 2017, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing

[4] Yoshiyuki Kagei, Bifurcation of the compressible Taylor vortex I, II (Series of lectures), Nonlinear Partial Differential Equations for Future Applications "Hyperbolic and Dispersive PDE", July 24 -- 28, 2017, Katahira Campus, Tohoku University

[5] Yoshiyuki Kagei, Bifurcation of the compressible Taylor vortex, Vorticity, Rotation and Symmetry (IV) - Complexity, Regularity and Singularities, May 8 -- 12, 2017, CIRM in Luminy/Marseille, France

[6] Yoshiyuki Kagei, Stability and bifurcation analysis of the compressible Navier-Stokes equations (1), (2), (3), The 14th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, March 8--10, 2017, Waseda University

[7] 隠居良行, Stability and bifurcation analysis of the compressible Navier-Stokes equations, 京都大学理学部数学教室 大談話会, 2017 年 1 月 25 日, 京都大学

[8] 隠居良行, 圧縮性 Navier-Stokes 方程式の Poiseuille 流の不安定性と分岐進行波解, 数学協働プログラム「ワークショップ」(工学と現代数学の接点を求めて(2))「流体工学と現代数学の接点」, 2016 年 12 月 21 日, 大阪大学基礎工学部

[9] Yoshiyuki Kagei, On the linear artificial compressible system, International Workshop on Nonlinear PDEs 2016 in Osaka, December 7--9, 2016, I-site Namba, Osaka Prefecture University

[10] Yoshiyuki Kagei, On the spectrum of linear artificial compressible system, RIMS Workshop on Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics, July 6, 2016 (July 6--8, 2016), Kyoto University

[11] 隠居良行, On the artificial compressible system, RIMS 研究集会「保存則と保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性, 特異性および長時間挙動の研究」, 2016 年 6 月 6 日 (2016 年 6 月 6 日--6 月 8 日), 京都大学

[12] Yoshiyuki Kagei, On Chorin's method for stationary solutions of the Oberbeck-Boussinesq equation, The Navier-Stokes Equations and Related Topics -- In Honor of the 60th Birthday of Professor Reinhard Farwig --, March 9, 2016, Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Japan

[13] 隠居良行, Traveling waves bifurcating from Poiseuille flow in viscous compressible fluid, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 2015 年 12

月 19--20 日, 東京大学大学院数理科学研究科

[14] Yoshiyuki Kagei, Traveling waves bifurcating from Poiseuille flow in viscous compressible fluid, International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modelling and Numerics, November 10 -- 13, 2015, Waseda University, Japan

[15] Yoshiyuki Kagei, On the Stability of Parallel Flow in Viscous Compressible Fluid, 4th International Conference on Mathematical Theory of Turbulence via Harmonic Analysis and Computational Fluid Dynamics, September 25, 2015, Hotel Nikko Nara, Nara, Japan

[16] Yoshiyuki Kagei, Instability of Poiseuille flow in viscous compressible fluid, Banach Center Conference, Mathematical Fluid Mechanics: Old Problems, New Trends -- A week for Prof. Wojciech Zajączkowski, August 30--September 5, 2015, Bedlewo, Poland

[17] Yoshiyuki Kagei, Stability of viscous compressible flows, PNU MATH FORUM 2015, July 15--17, 2015, Pusan National University, Korea

[18] Yoshiyuki Kagei, Instability of Poiseuille flow in viscous compressible fluid, IMS PDE Seminar, June 9, 2015, The Chinese University of Hong Kong, China

[19] Yoshiyuki Kagei, On the instability of Poiseuille flow in viscous compressible fluid, The fourth international conference on nonlinear evolutionary partial differential equations -- theories and applications, June 3, 2015, Shanghai Jiao Tong University, China

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等

<https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~kagei/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

隠居 良行 (KAGEI, Yoshiyuki)  
九州大学・数理学研究院・教授  
研究者番号 : 80243913

(2) 研究分担者

( )

研究者番号 :

(3) 連携研究者

前川 泰則 (MAEKAWA, Yasunori)  
京都大学・理学研究科・准教授  
研究者番号 : 70507954

(4) 研究協力者

( )