様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 １７ 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2018
課題番号：１５K１３４５０

研究課題名（和文）非線形解析と確率微分方程式

研究課題名（英文）Nonlinear Analysis and Stochastic Differential Equations

研究代表者
名和　範人（Nawa, Hayato）

明治大学・理工学部・専任教授

研究者番号：９０２１８０６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：擬共型不変な非線形シュレーディンガー方程式の爆発解の爆発の速さは，解の背後にあるネルソン拡散過程の挙動と関係していることが本研究によって明らかにされ，実際，その拡散過程を定める伊藤型確率微分方程式のブラウン運動を利用して爆発レートを評価することが可能で。爆発の速さに対して理論的に尤もな上限と下限を設けると，loglog law と呼ばれる普遍的な爆発のレートを証明できる。また，古典的なコルモゴロフの乱流理論とオンサーガーの乱流に対する予想を確率過程論の立場から見直し，非圧縮性オイラー方程式の散逸的弱解を乱流サンプルとして新しい乱流モデルの構築を目指し研究継続中である。

研究成果の学術的意義や社会的意義
決定論と非決定論の間にある様々な現象の理解に向けて，決定論的な非線形偏微分方程式の解の解析にその背後になる確率過程を利用したり，解の族がなす集団的な性質を統計力学的な視点を持ち込んで解析する方法論の確立を模索してきた。一般論の建設には至らなかったが，非線形シュレーディンガー方程式の様々な解や類似の現象を示す非線形偏微分方程式の解の解析，さらには新しい乱流の数学モデルの構築に向けて，さらなる理解と発展への新しい一歩を踏む出すことができたと思う。

研究成果の概要（英文）：We find that the loglog-law for the blowup solutions of the pseudo-conformally invariant nonlinear Schroedinger equations can be understood as a manifestation of the LIL for the Brownian motions consisting the Ito type stochastic differential equations which characterize the Nelson diffusions for the blowup solutions. In this study, we assume that the blowup speed is faster than self-similar one and slower than pseudo-conformal one, and assume further that the singularity is “very large” and the shoulder remains appropriately for the estimate from above. Thus, we may say that the loglog-law is a kind of universal nature of the blowup solutions.

Furthermore, we are trying to construct a new mathematical model of turbulence based on dissipative weak solutions of the incompressible Euler equations. This insight is brought by our previous work on the Kolmogorov’s scale law and the Onsager conjecture.

研究分野：非線形偏微分方程式の解の性質の探求

キーワード：非線形シュレーディンガー方程式　確率過程　爆発解　重対数法則　基底波解　散乱理論　非圧縮性オイラー方程式　乱流

１．研究開始当初の背景

　決定論的な方程式の解析とそれが持つ確率論的な構造の間には，当初認知されている以上の関係があると考えられた。例えば,擬共型不変な非線形シュレーディンガー方程式の爆発解は，一般的には重対数法則（loglog law）と呼ばれる爆発の速さを示すと考えられていたし，数学的にも基底波解のごく近くの爆発解は全て重対数法則に従うことが Merle-Raphael (2003) によって示されていた。この爆発の速さはブラウン運動が示す重複対数法則（LIL = Law of Iterated Logarithm）と極めて類似の形をしている。実際，非線形シュレーディンガー方程式の解の背後には，線形の場合と同様にネルソン拡散過程と呼ばれる確率過程が存在し，爆発解の示す重対数法則はネルソン過程を特徴付ける伊藤型確率微分方程式に現れるブラウン運動の重複対数法則に由来するものであるらしいことが，それまでの研究代表者の研究で分かったところであった。また，乱流に関して著名な言明である，コルモゴロフのスケール則とオンサーガー予想は確率過程論を通して結びついていることも本研究代表者らの研究によって明らかにされており，この関係を満足するような流れ場のサンプルとして，当時急速な発展を見せていた非圧縮性オイラー方程式の散逸的弱解がもっとも有望であるように見受けられた。

２．研究の目的

　本研究は，確率微分方程式を用いた非線形偏微分方程式の解の性質の解析，および，解の族の背後にある集団的（統計力学的）性質の探求を行うものである。非線形および線形偏微分方程式の背後には，ある種の確率論的な構造（例えば，線形の熱方程式に対するブラウン運動，シュレーディンガー方程式のネルソン拡散過程など）が存在している。また，乱流のように（古典乱流のみならず量子乱流も含めて),ある決定論的な偏微分微分方程式の解の集団が示す特徴的な統計的な性質として理解できる現象もある。

　本研究では，擬共型不変な非線形シュレーディンガー方程式の解の爆発現象に対して，その解の背後にあるネルソン拡散過程を利用して解析する事を一つのモデルケースとして取り上げて,より一般的に，このような決定論的な系の背後に潜む確率論的な構造をあぶりだし，決定論的な非線形偏微分方程式とその背後にある確率論的な構造をより有機的に関連づけることによって，一つ一つの解の性質を探求する方法論の確立を目指す。そのためにも，非線形シュレーディンガー方程式の解析で得られた知見を用いて，より一般的な理論を構築する礎として，粘菌の凝集現象を記述するような走化性方程式の爆発現象を解析することも考えている。

　もう一つの目的は，個別の方程式の解の性質の解析を通して，乱流現象のような方程式の解の集団を支配するマクロな論理を見出す方法論の確立である。例として，非圧縮性オイラー方程式の，近年発展著しい散逸的弱解をサンプルとするよう理想乱流ともいうべき新しい乱流の数学モデルの構築を目論んでいる。究極的には，決定論と非決定論を，非線形偏微分方程式論と確率解析のより高次な結合から俯瞰できるような理論の構築への一里塚となるような成果を期待している。

３．研究の方法

⑴ 擬共型不変な非線形シュレーディンガー方程式の爆発解の爆発の速さは，爆発解が生成する特異点の形状と密接に結びついていると考えられる。さらに，特異点だけではなくそれ以外の部分の無限遠での振る舞いも重要な役割を担っているように見える。これらの様子を，爆発解の背後にあるネルソン拡散過程の振る舞いと数学的に結びつける必要がある。爆発の速さの証明のコアになる部分は，ブラウン運動に対してブルメンタールの 0-1 法則を応用することによって証明できるが，上からの評価は個別の爆発解に対する依存性が極めて高い。

⑵ 上述のことを鑑みると，特異点を記述する基底波解や励起解の性質（一意性や非退化性）の詳細が必要になる。このような従来の変分法を用いた解析や線形化作用素のスペクトル解析も重要であるが，研究協力者とは，このような手法を用いて，非線形シュレーディンガーの基底波解の近傍の解の分類定理の完成を目指して数年に亘る共同研究を続けているので，その成果が役に立つであろう。

⑶ 古典乱流に関して K41 と呼ばれるコルモゴロフの乱流理論における乱流の統計的なスケール則と，オンサーガー予想として知られる個別の乱流サンプルの滑らかさは，コルモゴロフ＝セントフの定理と呼ばれる確率過程論の有名な定理を通して結びついていることが分かっているが,これを実現するサンプルは非圧縮性オイラー方程式の散逸的弱解であろうと考えられる。周辺論文の精査とともに，離散モデルを用いたモデルの精密化を図る。

４．研究成果

⑴ 擬共型不変な非線形シュレーディンガー方程式の爆発解の爆発の速さは，解の背後にあるネルソン拡散過程の挙動と関係していることが，本研究によって分かっている。実際，その拡散過程を定める伊藤型確率微分方程式のブラウン運動を利用して爆発の速さを評価する：爆発の速さに対して理論的に尤もな上限と下限を設けると，loglog law と呼ばれる一定の爆発の速さが出現することが証明でき,このような意味で一種の普遍性定理を示したことになっている。しかしながら，上からの評価には，爆発解の形状に関すると思しき仮定をおいている。数値シミュレーションの結果などを鑑みると自然な仮定のように見えるが，仮定が成立する状況を数学として明解にすべく研究を進めている。現在までに得られた，数学として厳密に成立する部

分については，確率論シンポジウムや関西確率論セミナー等で発表を行った。また，査読付き学術誌に投稿すべく論文を準備しているところである。

⑵ 上術の爆発の速さの上からの評価の前提としている仮定のより深い数学的な理解当たって，爆発解の生成する特異点を記述する基底波解や励起解の性質をより詳しく知る必要が生じた。そこで，以前から行っていた二つの引力として働く多項式型の非線形項の和で表わされるような，局所型相互作用項を持った非線形シュレーディンガー方程式の基底波解の周辺の解軌道の分類定理の研究も継続した。この分類定理の証明の最初のステップとして基底波解の存在とその性質を知ることが重要であるからである。本研究の期間内に成果を得ることができた方程式は，高い方の非線形冪はソボレフ臨界指数に対応する指数であり，低い方の冪は擬共型冪より大きいものであるが，この研究で得られた成果は今後の応用に十分に資するものである。初期の成果は低い周波数帯の基底波解の近傍におけるものであったが，高い周波数帯においても基底波解の存在／非存在や一意性について結果を得ることができて高周波数帯での分類定理の証明も完成間近である。また，無限の未来／過去において漸近的に自由となる解（散乱解）とネルソン拡散過程の漸近挙動との間には，量子古典対応と類似の関係があると考えられるが，その関係性についても研究を進めている。

⑶ 古典的なコルモゴロフの乱流理論とオンサーガーの乱流に対する予想を確率過程論の立場から見直した結果，ここ重年ほどの間に急速に進展した，非圧縮性オイラー方程式の散逸的弱解こそが乱流サンプルとしてふさわしいと考えられた。オイラー方程式を基礎とすると，乱流を特徴付けるエネルギー散逸率非消失の仮定の再考を迫られるが，カルマン＝フォワース＝モニンの関係式を拠り所として新しく散逸率を定義することにより，新しい乱流モデルの構築の可能性が浮かび上がった。この研究を発展させて新しい数学の乱流モデルの構築を目指してきた。未だ道半ばではあるが，その周辺についてのサーベイ論文を執筆中である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Takafumi AKAHORI, Slim IBRAHIM, Hiroaki KIKUCHI, Hayato NAWA, “Global dynamics above the ground state energy for the combined power type nonlinear Schrödinger equations with energy critical growth at low frequencies” The Memoirs of the American Mathematical Society, 査読あり，印刷中
雑誌 URL：http://www.ams.org/publications/ebooks/memoirs

② Takafumi AKAHORI, Slim IBRAHIM, Norihisa IKOMA, Hiroaki KIKUCHI, Hayato NAWA, “Uniqueness and nondegeneracy of ground states to nonlinear scalar field equations involving the Sobolev critical exponent in their nonlinearities for high frequencies” Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 査読あり，印刷中
雑誌 URL： https://link.springer.com/journal/526

③ 名和　範人（Hayato NAWA），“Nelson 拡散課程と非線形 Schrödinger 方程式 (Nelson diffusions and nonlinear Schrödinger equations)”，数理解析研究所講究録，査読なし，印刷中
雑誌 URL：http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/kokyuroku.html

〔学会発表〕（計 11 件）

① 名和 範人,“レーザービームの自己集束と非線形シュレーディンガー方程式”,研究集会「パターン生成とダイナミクスの解構造の研究」，2015 年

② Hayato NAWA, “A Mathematical Aspect of Turbulence”, International Workshop on Theoretical Aspects of Near-Wall Turbulence Studies, 2016 年

③ 名和 範人（Hayato NAWA），“決定論的な系の中の確率論的な性質：二つの例（Stochastic Nature in Deterministic Systems: two examples）” International workshop on mathematical sciences for nonlinear phenomena in honor of Prof. Hisashi Okamoto on his 60th birthday, 2016 年

④ Hayato NAWA, “Existence and uniqueness of ground state of semilinear elliptic equations involving the critical and super critical exponents in their nonlinearities” Geometry of solutions of PDE’s and its related inverse problems - A conference in honor of professor Shigeru Sakaguchi’s sixtieth birthday - , 2016 年

⑤ 名和 範人,“非線形シュレーディンガー方程式とネルソン拡散課程”，第３回「量子渦と非線形波動」2016 年

⑥ 赤堀 公史,“Dynamics near the ground state for the combined power-type nonlinear Schrödinger equations with energy-critical growth”, RIMS 共同研究「反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動」，2017 年

⑦ 菊池 弘明,“Global dynamics above the ground state energy for a class of nonlinear Schrödinger equations with critical growth”, The Tenth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena (Computation and Theory), 2017

年
⑧ 菊池 弘明,“Uniqueness of ground states to nonlinear scalar field equations involving the Sobolev critical exponent in their nonlinearities”,第１５回浜松偏微分方程式研究集会, 2017年
⑨ 菊池 弘明,“Uniqueness of ground states to nonlinear scalar field equations involving the Sobolev critical exponent in their nonlinearities”, RIMS 共同研究「非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ」, 2018年
⑩ 名和 範人,“Nelson 拡散課程と非線形 Schrödinger 方程式”,確率論シンポジウム, 2018年
⑪ 名和 範人,“非線形シュレーディンガー方程式の重対数法則とブラウン運動の重複対数法則 (The loglog law for Nonlinear Schrödinger equation and the LIL for Brownian Motion)”,関西確率論セミナー, 2019年

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：赤堀 公史
ローマ字氏名：(AKAHORI, Takafumi)
所属研究機関名：静岡大学

研究協力者氏名：菊池 弘明
ローマ字氏名：(KIKUCHI, Hiroaki)

所属研究機関名：津田塾大学

研究協力者氏名：Slim Ibrahim
ローマ字氏名：(IBRAHIM, Slim)
所属研究機関名：University of Victoria

研究協力者氏名：生駒 典久
ローマ字氏名：(IKOMA, Norihisa)
所属研究機関名：慶應義塾大学

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。