様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2015～2016
課題番号：１５Ｋ１３４５４

研究課題名（和文）有限要素法における``良い''要素形状の多角的研究

研究課題名（英文）What is ``good" shape of elements in FEM

研究代表者
齊藤　宣一（Saito, Norikazu）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：００３３４７０６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：有限要素法は現代の数値シミュレーション技術を支える基盤技術であり，数学理論で正当性が保証されている．特に，要素の形状と有限要素解の性質については，収束性や安定性の他にも，いろいろなことが知られている．しかし，単純な三角形一次要素に限っても,何が良い要素形状，あるいは何が良い分割なのかを数学的に明快に表現する一貫した理論はまだ存在しない．ユーザが目的に応じて経験 的に選択しているのが現状である．本研究では，いろいろな有限要素について，次の観点から，統一的な考察を行った：(1)節点補間の誤差 (2)係数行列の条件数と分割の非一様性 (3) 離散最大値原理・最大正則性などの解析的性質．

研究成果の概要（英文）：The finite element method is a fundamental technology and its validity is guaranteed by the mathematical theory. In particular, regarding the shape of elements and the mathematical properties of finite element solutions, various things are known besides convergence and stability. However, even with the simplest triangle primary element, there is no consistent theory expressing mathematically and clearly what is the good element shape or what is a good triangulation. In this research, using various finite elements, we studied the following: (1) error of nodal interpolation (2) Condition number of coefficient matrix and nonuniformity of triangulation (3) Analytical properties such as discrete maximum principle and maximal regularity.

研究分野：数値解析

キーワード：有限要素法　要素分割　誤差評価　不連続ガレルキン法

## １．研究開始当初の背景

Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題を，最も標準的な三角形一次要素による有限要素法で近似した場合，近似関数は，三角形分割が正則性の条件を満たす限り，分割パラメータ（要素の最大辺長）h を h→0 としたとき，真の解に H^1_0 あるいは L^2 のノルムの意味で収束する．このことは，すべての教科書に述べられている基本事項であり，また，正則性の条件は，分割に現れる三角形の内角の最小値 theta_min が，分割に無関係な正定 alpha で下から theta_min≧alpha のように押さえられていることと同値である（最小角条件）．ただし，これは必要十分条件ではなく，実際，より一般的な最大角条件や外接半径条件も知られている（ただし，3 次元四面体要素では，これに対応する概念はない）．また，有限要素近似解が，最大値原理を満たすためには，分割が Delaunay 型であることが要請される．さらに，-Delta（ラプラシアン）の有限要素近似が，解析的半群を生成したり離散最大正則性を満たすためにも，やはり，Delaunay 型であることが要請される．もし，境界条件が Neumann 条件なら，境界に隣接する要素は，さらに，非鈍角三角形でなければならない．一方で，係数行列の条件数の観点からは，これらの形状の条件はあまり影響がなく，分割が一様（合同な三角形のみから三角形分割が成る）であることが重要で，非一様性が強い分割は不利である．このことは，教科書・専門書であまり述べられていないが，専門家は，経験的に知っているようである．

　分割の非一様性を制御する数学的概念に，逆仮定があり，L^p ノルムでの評価導出や放物型問題の解析においては必須である．しかし，逆仮定と条件数の関係に付いては，明確な研究は存在しない．3 次元要素ついては尚更であり，それにも関わらず，現実的な応用計算で用いられている mesh refinement において，その良し悪しを計る基準は事後誤差評価のみである．

## ２．研究の目的

有限要素法は，現代の数値シミュレーション技術の屋台骨を支える基盤技術の一つであり，端正な数学理論で正当性が保証されている．特に，要素の形状や三角形分割の仕方と，有限要素解の数学的性質については，収束性や安定性の他にも，いろいろなことが知られている．しかし，上で述べたように，最も単純な三角形一次要素に限っても，何が``良い''要素形状，あるいは何が``良い''分割なのかを数学的に明快に表現する一貫した理論はまだ存在しない．ユーザが目的に応じて経験的に選択しているのが現状である．本研究では，この溝を埋めるための試みとして，いろいろな有限要素について，次の観点から，統一的な考察を行う：

(1) 節点補間，局所 L^2 射影の誤差

(2)係数行列の条件数と分割の非一様性

(3) 離散最大値原理，解析半群，最大正則性などの解析的性質の再現.

なお，研究にあたっては，既存の有限要素法の誤差解析を越えて，以下の点に留意しつつ研究を遂行する.

有限要素法（FEM）の収束解析の新境地：

FEM の収束解析は，応用解析学の華々しい成功例の一つであり，少なくとも，三角形一次要素による線形楕円型方程式の近似理論は完成していると思われていた．しかし，近年，連携研究者の小林・土屋により，外接半径条件という大きなブレークスルーがなされた．すなわち，三角形分割に正則性（最小角条件）を課した上で，要素の最大辺長 h を h→0 としたときの, 誤差の漸近挙動を論ずるのが，FEM における収束解析と思われていたのだが，実は，分割に現れる三角形の外接円の半径の最大値 R を，R→0 としたときの挙動が本質的であることが明らかにされた．すなわち，要素形状と近似解の品質について我々の知っていることが，必ずしも本質的でないことが明らかになったのである．したがって，この結果を，高次要素，あるいは DG 法（下記）における一般的な多項式近似に拡張することは，有限要素法の数学理論の再構築}に匹敵する先駆的な仕事となる. またこれを機に，三角形一次要素の場合にしか理論が存在しなかった，離散最大値原理の実現や，離散解析半群の生成，離散最大正則性の実現のための，要素形状の研究を，高次要素や DG 法にまで拡張することは, FEM の数学理論の再構築を通じた，より高品質な新しい数値計算手法の提案を実現する.

実用計算への品質保証の新基準：

現実的な応用計算で用いられている mesh refinement において, 要素形状の良し悪しを計る基準は事後誤差評価（計算した数値解を用いて表現された誤差の見積もり）のみである．しかし，実は，計算時間（反復計算の収束しやすさ）・計算品質（数値解の微小な摂動に対する安定性）の観点から，係数行列の条件数は重要なはずであるが，これに関しては，h が十分小さいときの，漸近的な評価が知られているのみである．したがって，形状と条件数の関係，もう少し具体的には，要素分割の非一様性と条件数の関係を明らかにするのは実用的な価値がある．分割の非一様性を表現する概念である逆仮定が，

時間発展問題の解析や L^p ノルムでの解析に登場するのは興味深い．後者は完全に数学的な概念であり，本研究チームの最も得意とするところである．事後誤差評価とは異なる，数値解の品質保証の基準を確立することで，

実用計算，特にメッシュ生成や大規模非定常問題の計算の分野に，数学の立場から大きな寄与をなすことになる．

不連続 Galerkin 有限要素法（DG 法）における``分割の正則性"とは？:
標準的な FEM では，領域を三角形など（要素）に分割し，領域全体で連続な区分的多項式を近似関数として用いて近似を行う．近年，要素間での不連続性を認め，有限体積法の数値流束という概念を取り入れることで，その不連続性を制御する DG 法の研究が盛んである．結果として，DG 法は，FEM と有限体積法のそれぞれの長所を両立させるばかりか，要素として任意の多角形が採用でき，要素ごとに異なる次数の多項式が利用できる．
しかし，DG 法において，要素形状の選択肢が格段に広がっているため，許容される具体的な要素形状が曖昧になってしまった．DG 法の数学的研究は，欧米・中国において，ここ十年，熾烈であり続け，現在では，応用段階に入っていると思われる．しかし，関数解析学の理論に乗りやすい長所がかえって災いし，応用上重要であるはずの基本性質の多くを仮定したまま，鮮やかな理論ばかりが先行したきらいがある．要素形状についても，いささか抽象的な条件が課されるか，局所節点補間誤差評価自体を仮定しているかのどちらかである．この溝を埋め，特に，応用に直結した，様々な目的に対する``許容される要素形状"を明確にすることは，数学のための数学理論を超えた，応用に直結した数学理論の構築を達成することになる．

## ３．研究の方法

まず，三角形一次要素についての結果をまとめ，その後，不連続 Galerkin 有限要素法（DG 法）における多角形一次要素や高次要素を対象にして，数学的に端正であり，実用的な価値のある，幾何学的な条件（数式によって表現されるばかりでなく，幾何学的に説明のつくもの）の導出を目標とする．必要十分であることまでは，要請しない．十分条件で良い．目的に応じて，``良い"条件は異なるであろうが，ここで重視するのは，一貫性のある理論により，それら整理，解析し，実用計算への実質的寄与と，数値解析理論のさらなる深化を実現する．

## ４．研究成果

代表者は院生の劔持氏，千葉氏と共同で，楕円型方程式に対する有限要素法における離散最大値原理の研究を中心におこなった．千葉氏と行っている DG 法については，作為的な仮定の元でしか離散最大値原理が成立しないという否定的な結果し得られなかった．劔持氏と行っている通常の有限要素法については，異方拡散問題対する要素形状の必要十分条件を書き下すことに成功した(2 次元のみ)．また，結果を，放物型方程式に最大正則性に応用し，半線形放物型方程式の有限要素近似について，初期値の大きさにも近似解の存在区間にも制限を課さずに，最適誤差評価を導出する新しい方法を提案した．
　一方，連携研究者の及川氏と共同で，ハイブリッド型の DG 法(HDG 法)の研究に着手し，楕円型界面問題への HDG 法の解析の際に必要となる，分数冪ソボレフ空間における逆不等式の構成に成功した．
　また，分担者・佐々木とともに，非線形偏微分方程式の爆発解の計算のための，（差分法における）時間メッシュの決め方について，従来の Nakagawa の方法を，非線形波動方程式，非線形シュレディンガー方程式への拡張に成功した．
　分担者・土屋，小林は，補間誤差評価のための外接半径条件を３次元（４面体要素）への拡張を試み，高次要素については肯定的な結果を得た．
　分担者・山田，水藤と代表者は，現実の数値シミュレーションにおいて重要な四面体分割について，従来の経験的な知見を（数学的に）俯瞰的な観点からまとめたが，数学的に新しい結果の創出にまでは至らなかった．

## ５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）
1. N. Saito and T. Sasaki: Finite difference approximation for nonlinear Schreodinger equations with application to blow-up computation, Jpn. J. Ind. Appl. Math., Vol. 33 (2016) 427-470.
DOI: 10.1007/s13160-016-0218-8
2. N. Saito and T. Sasaki: Blow-up of finite-difference solutions to nonlinear wave equations, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, Vol. 23, No. 1, (2016) 349-380
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/journal/number/jms2301.html

〔学会発表〕（計 7 件）
１．齊藤宣一，バブシュカのパラドックス，数理モデルとシミュレーション，2015 年 10 月 31 日-11 月 2 日，休暇村伊良湖(愛知県・田原市)
2．宮下大，齊藤宣一，楕円型界面問題に対するハイブリッド型不連続 Galerkin 法，日

本応用数理学会 2016 年研究部会連合発表会，「科学技術計算と数値解析」研究部会，2016 年 3 月 4-5 日，神戸学院大学ポートアイランドキャンパス（兵庫県・神戸市）
3．千葉悠喜，齊藤宣一，移流拡散方程式に対する不連続 Galerkin 法の理論解析における注意， 日本応用数理学会 2016 年 研究部会連合発表会，「科学技術計算と数値解析」研究部会，2016 年 3 月 4-5 日，神戸学院大学ポートアイランドキャンパス（兵庫県・神戸市）
4．T. Kemmochi and N. Saito: Discrete maximal regularity and the finite element method for parabolic problems, EASIAM 2016: SIAM East Asian Section Conference 2016, June 20-22, 2016, Macau (China)
5．N. Saito and T. Kemmochi: Discrete maximal regularity and the finite element method for parabolic problems, CJK2016: The Sixth China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics, August 22-26, 2016, Daejeon (Korea)
6．T. Sasaki and N. Saito: Finite difference approximation for nonlinear Schr¥" odinger equations with application to blow-up computation, CJK2016: The Sixth China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics, August 22-26, 2016, Daejeon (Korea)
7. 齊藤宣一：数値計算に潜むトラップ，理学セミナー（日本女子大学），2016 年 12 月 2 日，日本女子大学，東京都・文京区

６．研究組織
(1)研究代表者
齊藤　宣一（SAITO, Norikazu）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：00334706

(2)研究分担者
佐々木 多希子（SASAKI, Takiko）
早稲田大学・グローバルエデュケーションセンター・助手
研究者番号： 30780150

(3)連携研究者
水藤 寛（SUITO, Hiroshi）
岡山大学・環境生命科学研究科・教授
研究者番号：10302530

山田 貴博（YAMADA, Takahiro）
横浜国立大学・環境情報研究院・教授
研究者番号：40240022

土屋卓也（TSUCHIYA, Takuya）
愛媛大学・理工学研究科・教授
研究者番号：00163832

小林 健太（KOBAYASHI, Kenta）
一橋大学・商学研究科・准教授
研究者番号：60432902

及川 一誠（OIKAWA, Issei）
早稲田大学・理工学術院・研究員
研究者番号：10637466