

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 1 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13458

研究課題名(和文)非線形共鳴相互作用が支配する漸近的力学系と流体方程式

研究課題名(英文)Asymptotic systems governed by nonlinear resonant interaction and fluid systems

研究代表者

山田 道夫(Yamada, Michio)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：90166736

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：回転球面上の2次元 Navier-Stokes 方程式の解が、回転角速度の増大とともに、非線形項を非線形共鳴相互作用のみに限定した流体方程式(極限方程式)の解に近づくことを示した。これは、共鳴相互作用項以外の非線形相互作用は、回転角速度の増大とともに激しく振動して打ち消し合いが生じるためである。常状流に対応するモードはこの共鳴相互作用を通じて、他のモードのエネルギー輸送に直接の寄与は行わないが、他のモードの位相変化には寄与する。数値シミュレーション結果は、この位相変化の効果は全系のエネルギー輸送を考える際に無視できない効果を及ぼすことを示している。

研究成果の概要(英文)：In 2-dimensional Navier-Stokes equations on a rotating sphere at high rotation rates, solutions are shown to converge to those of the fluid equations the nonlinear terms of which consist only of resonant nonlinear interactions. This convergence is understood as a result of the cancellation of non-resonant terms due to high-frequency oscillation. Wave modes corresponding to zonal flows make no contribution to energy transfer through the resonant interactions, but contribute to phase change of other modes. Numerical simulation shows that the phase change brings about a significant effect on the energy transfer among the waves modes, and therefore the zonal flows should be taken into account in the resonant interaction to describe the time-development of the system.

研究分野：応用数学，流体力学

キーワード：流体 波 回転流体

## 1. 研究開始当初の背景

線形波動解を伴う場の非線形現象では、波動解の共鳴相互作用が非線形相互作用の主要項となる場合があり、そのときは、共鳴相互作用が非線形解の空間パターンやそのダイナミクスを支配して系の振舞いを決定する。非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式は、さまざまな復元力の下で線形波動解を持つ。例えば、宇宙惑星科学に現れる大規模流体運動では、回転効果による線形波動 (Rossby 波) が存在し、非線形現象はしばしば Rossby 波の非線形相互作用の結果として現れる。

しかし従来このような視点からの研究は非常に困難であった。その理由は第一に、非線形相互作用の中で共鳴相互作用の位置づけが数学的に明確でなかったこと、第二に、数値シミュレーション上の困難が存在するため共鳴相互作用による時間発展の性質が定性的にすら未知であったことによる。

そこで申請者らは、 $\beta$  平面 (回転球面の接平面近似として、回転角速度を座標  $y$  の一次関数とした平面) 上の 2 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式において、非線形共鳴相互作用の数学的な解析を行った。 $\beta$  平面上では線形波動解 (Rossby 波) が存在するが、申請者らは回転角速度が大きな極限では、流れ場の時間発展が、Rossby 波の非線形共鳴相互作用のみによる時間発展に近づくことを数学的に証明した (Yamada and Yoneda, *Physica D*, 245 (2013)1)。この結果は共鳴相互作用の意味を明らかにするもので、流れの解析への応用も試みられている。

## 2. 研究の目的

本研究では、まず、申請者らの  $\beta$  面における数学的結果に基づき、より本質的で重要な回転球面上の 2 次元 Navier-Stokes 方程式を対象として漸近方程式を導出することを目指した。球面上の流体方程式では、線形波動は球面調和関数に対応し、従って共鳴条件も平面の三角関数の場合に比して格段に複雑になるため、解析には平面上の手法の単なる拡張ではない新しい方法の導入が必要である。漸近方程式は非線形項を非線形共鳴相互作用に限定した方程式となると予想した。

回転球面の場合、個々の球面調和関数が線形波動モードとなり、それぞれのモードは比較的少数個数のモードとのみ共鳴条件を満たすこと、またこのような共鳴対は形式的に (低波数領域では) 4 つの孤立集合とそれ以外の波数対集合に分かれることが知られている (Kartashova and L'vov, 83, *EPU*, 50012, 2008)。しかしこの運動学的な情報だけでは明らかに不十分であり、漸近方程式の時間発展解の概要すら不明であるため、時間発展の力学的特性を明らかにするためには数値計算が必須である。しかし、この数値計算の実行例は少なく時間発展の性質は殆ど

知られていない。

本申請では、漸近方程式の位置づけを行い、数値計算を実行し、得られる数値結果によって、漸近方程式の解の時間発展の特性を調べる。一般に、大きな復元力 (本研究の場合は大きな回転角速度) をもつ線形波動が存在する系では、非線形共鳴相互作用が系の時間発展を支配することは普遍的な性質であると予想される。しかし流れ場においてその漸近方程式の性質が明らかになっている例は殆ど無い。本研究はそのような性質を、回転球面上の 2 次元流体系において調べることが目的である。

## 3. 研究の方法

本研究計画は 2 つの要素からなる。第一は、回転球面上の 2 次元 Navier-Stokes 方程式の解が、回転角速度の増大と共に、非線形項を非線形共鳴相互作用のみに限定した発展方程式 (漸近方程式) の解に収束することを示すことである。第二は、このようにして正当化された漸近方程式の解の時間発展を調べるための数値計算の実行である。

第一の点については、回転球面上の 2 次元 Navier-Stokes 方程式の解が回転角速度の増大とともに収束すること、またその極限解の従う方程式 (漸近方程式) が非線形項を非線形共鳴相互作用のみに限定した方程式であることを示す。これまでに、関連する予備的結果として、 $\beta$  平面上では、 $\beta \rightarrow \infty$  のとき、流れ場の時間発展が、Rossby 波の非線形共鳴相互作用のみによる時間発展に近づくことを証明しており、その方法を参考にして研究を進めた。

第二の点については、予想される漸近方程式の数値解析手法の開発を行う。この漸近方程式の正当化は本研究の中で行う計画であるが、それ以前の観察として、非線形項の中で非線形共鳴相互作用項が卓越するであろうことは物理的に見ても自然であるため、この漸近方程式を用いて高速回転の場合を議論することには意味があると考えられる。漸近方程式は、球面調和関数によるスペクトル法を用いた場合、非線形項が通常の畳み込みではなく共鳴条件を満たす相互作用項のみを含む形となる。このため、通常とは異なり、高速フーリエ変換を用いた高速化が困難で、計算時間が文字通り桁違いに大きくなるため実用的な計算が難しく、非線形項の計算時間を短縮するための別の工夫が必須となる。一方、回転球面上では、共鳴条件が強い制約となるため、共鳴対を構成するモード対は非線形項に含まれる波数対全体のごく一部に限られている。非線形相互作用を共鳴対にのみ限る計算は、ここで扱う流体系以外にも、非圧縮性流体の表面波 (水面波) の系や内部波系、さらにこれらの結合系などの議論にも表れるが、ほとんどの場合、共鳴対のみに限った時間発展方程式は直接扱われることが

無い。そこでここでは各共鳴対のクラスターに着目し、クラスターのみを残すフィルタを用意して、クラスターのみを時間発展計算を大きな回転角速度の状況で行うことにより、クラスター内の共鳴相互作用による時間発展を計算する。各クラスターについてこの計算を実行し、全系の数値シミュレーション結果などと比較検討することにより、時間発展の性質を調べる。

#### 4. 研究成果

回転球面上の2次元 Navier-Stokes 方程式の解が回転角速度の増大とともにある解に収束すること、またその解の従う方程式(漸近方程式)が非線形項を非線形共鳴相互作用のみに限定した方程式であることを示した。物理的に考えて、共鳴相互作用の項以外の項は、回転角速度が大きくなるに従って激しい振動を行うため、対象とするモードの特性時間の間に振動による打ち消し合いが生じて、非線形相互作用の効果が低下する。 $\beta$ 面乱流で起こっていることはまさにこの効果に他ならないが、回転球面上においても同様の効果が発生し、結果的に非線形相互作用を非線形共鳴相互作用のみに限定した方程式に従う解に近づくことが分かる。ただし、これは、時間の有限区間 $[0, T]$ において得られる結論である。そのため、任意に大きな回転角速度を設定しても、それに対してある時刻  $T'$  が存在し、その時刻以降は解は非線形共鳴相互作用のみによる解から次第に離れることになると思われる。

一方、回転球面上の2次元 Navier-Stokes 方程式の場合には、個々の球面調和関数が波動モードに対応し、非線形共鳴相互作用による相互作用を同値関係として、波動モード全体をクラスター分解することが行われてきた。このとき、帯状流成分(東西方向に一樣な流れに対応)は他のモードとのエネルギーのやり取りをしないことから、従来のクラスター分解は、帯状流成分が共鳴相互作用対に入っている場合でも帯状流成分を除いて考えられてきた。このようにして得られる各々のクラスターについて、特に低波数あるいは中程度の波数までのモードを含むクラスターを中心にクラスター内のダイナミクスを調べるため行った数値シミュレーションの結果はカオス的な振る舞いを示し、クラスター内のエネルギーが東西波数が小さな帯状流成分に集中してゆく傾向を示さない。これは、系全体のダイナミクスがクラスターダイナミクスの総和として書けると仮定すると、系全体では帯状流生成が生じるという従来の数値シミュレーション結果と両立しない。

共鳴相互作用における帯状流成分は、上述のようにエネルギー輸送には寄与しない。これは帯状流成分は、共鳴相互作用を行う相手のモードの位相を変化させるのみであることから来る性質である。しかし位相部分の変

化の及ぼす影響は自明ではない。そこで、系の数値シミュレーションにおいて、帯状流の寄与を OFF にした場合と ON にした場合を比較したところ、モード間のエネルギー輸送に差が見られ、OFF にすると、帯状流成分以外のモードの状態が変化して本来のエネルギー輸送を再現できないことを見出した。これは、従来のクラスター分解は、ダイナミクスを考える上では不適当であり、直接にはエネルギー輸送に関わらない帯状流輸送も、位相変化を通じて、系全体のエネルギー輸送において重要な役割を果たしていることを示している。このような観点から $\beta$ 面乱流についても数値シミュレーション等を実施して、エネルギー輸送の観点から、共鳴相互作用の構造と系全体の振る舞いの関係を調べた。 $\beta$ 面では長時間後も定常的な帯状流への収束が見られない点が回転球面の場合と大きく異なるが、この原因について今後の課題となるいくつかの仮説を得た。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

① Takehiro Shin-ichi、Sasaki Youhei, Penetration of steady fluid motions into an outer stable layer excited by MHD thermal convection in rotating spherical shells, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 査読有, vol. 276, 2018, 258-264, 10.1016/j.pepi.2017.03.001

② Sasaki Youhei、Takehiro Shin-ichi、Ishiwatari Masaki、Yamada Michio, Effects of radial distribution of entropy diffusivity on critical modes of anelastic thermal convection in rotating spherical shells, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 査読有, vol. 276, 2018, 10.1016/j.pepi.2017.09.003

③ Obuse Kiori、Takehiro Shin-ichi、Yamada Michio, Effect of turbulence on zonal jet flows in equivalent-barotropic quasi-geostrophic model, *ANZIAM Journal*, 査読有, vol. 58, 2017, 175-175, 10.21914/anziamj.v58i0.11782

④ Noda S.、Ishiwatari M.、Nakajima K.、Takahashi Y.O.、Takehiro S.、Onishi M.、Hashimoto G.L.、Kuramoto K.、Hayashi Y.-Y., The circulation pattern and day-night heat transport in the atmosphere of a synchronously rotating aquaplanet: Dependence on planetary rotation rate, *Icarus*, 査読有, vol. 282, 2017, 1-18, 10.1016/j.icarus.2016.09.004

⑤Nishizawa, S., Odaka, M., Takahashi, Y. O., Sugiyama, K., Nakajima, K., Ishiwatari, M., Takehiro, S., Yashiro, H., Sato, Y., Tomita, H., Hayashi, Y.-Y., Martian dust devil statistics from high - resolution large - eddy simulations, Geophys. Res. Lett., 査読有, vol.43, 2016, 4180-4188, 10.1002/2016GL068896

⑥Masanobu Inubushi, Shin-ichi Takehiro, and Michio Yamada, Regeneration cycle and the covariant Lyapunov vectors in a minimal wall turbulence, Physical Review E, 査読有, vol.92, 2015, 023022-1, -14, 10.1103/PhysRevE.92.023022

⑦Eiichi Sasaki, Shin-ichi Takehiro and Michio Yamada, Bifurcation structure of two-dimensional viscous zonal flows on a rotating sphere, Journal of Fluid Mechanics, 査読有, vol.774, 2015, 224-244, 10.1017/jfm.2015.262

⑧Yoshitaka Saiki, Michio Yamada, Abraham C.-L. Chian, Rodrigo A. Miranda and Erico L. Rempel, Reconstruction of chaotic saddles by classification of unstable periodic orbits: Kuramoto-Sivashinsky Equation, Chaos, 査読有, vol.25, 2015, 103123-1, -7, 10.1063/1.4933267

[学会発表] (計 17 件)

① Kiori Obuse and Michio Yamada, Three-wave resonant interactions in two-dimensional turbulence on a rotating sphere, 49th Meeting of the Division for Planetary Sciences, American Astronomical Society, 2017.

②Takehiro, S., Sasaki, Y., Ishioka, K., Nakajima, K., Ishiwatari, M., Hayashi, Y.-Y., Disappearance of surface banded structure produced by thermal convection in a rapidly rotating thin spherical shell., The 49th Annual Division for Planetary Sciences Meeting, 2017.

③佐々木 洋平, 竹広真一, 石岡圭一, 中島健介, 石渡正樹, 林祥介, 高速回転する薄い球殻中の対流により引き起こされる表層の帯状流への計算領域の影響, 日本気象学会 2017 年度秋季大会, 2017.

④小布施祈織, 山田道夫, 回転球面上非粘性 Rossby 波乱流における東西ジェットの形成, 第 6 回岐阜数理科学研究会, 2017.

⑤山田道夫, 「量子と古典の物理と幾何」(九

州大学箱崎キャンパス), 2017.

⑥山田道夫, 流体方程式の実効的エネルギー輸送 (EET) について, 現象と数理モデル 2017 (伊勢), 2017.

⑦小布施祈織, 山田道夫, 回転球面上 2 次元乱流における実効的エネルギー輸送, 日本物理学会第 73 回年次大会 (東京理科大学), 2017.

⑧Kiori Obuse, Shin-ichi Takehiro, and Michio Yamada, Effect of turbulence on zonal jet flows in barotropic model and quasi-geostrophic shallow water model, Int.Conf. on Applied Mathematics and Computer Science (ICAMCS) 2017, 2017.

⑨Kiori Obuse, Shin-ichi Takehiro, and Michio Yamada, An effect of turbulence on zonal jet flows in forced 2D and quasi-geostrophic shallow water models on a beta plane, SIAM Computational science and Engineering (SCE) 17, 2017.

⑩小布施祈織, 山田道夫, 回転球面上 2 次元乱流における三波共鳴非線形相互作用, 物理学会第 72 回年次大会, 2017.

⑪Kiori Obuse, Shin-ichi Takehiro, and Michio Yamada, An effect of turbulence on a zonal jet flow on a  $\beta$  plane, The Computational Techniques and Applications Conference (CTAC)2016, 2016.

⑫Sasaki, Y., Takehiro, S., Ishiwatari, M., Yamada, M., Critical mode of anelastic thermal convection in a rotating spherical shell depends on radial distribution of thermal diffusivity, The 15th symposium of Study for Earth Deep Interior (SEDI 2016), 2016.

⑬ Michio Yamada, 2D Navier-Stokes equations on a sphere, Naruto workshop on vortex dynamics, 2016.

⑭山田道夫, 2次元流の渦力学と帯状流, 研究会「渦を知る」, 2015.

⑮ Michio Yamada, Stability of one-directional flow on a rotating sphere, ICIAM2014(Beijing, China), 2015.

⑯山田道夫, 決定論的方程式に従う系における極値の統計, 統計数理研究所共同研究集会「極値理論の工学への応用」, 2015.

⑰山田道夫, 球面上の 2次元 Navier-Stokes 流, 共共拠点研究会 RIMS1963-IMI2013,

2015.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山田 道夫 (YAMADA, Michio)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号： 9 0 1 6 6 7 3 6

### (2) 研究分担者

竹広 真一 (Takehiro Shin-ichi)  
京都大学・数理解析研究所・准教授  
研究者番号： 3 0 2 7 4 4 2 6

### (3) 連携研究者

### (4) 研究協力者