

平成 30 年 5 月 29 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2017

課題番号：15K13459

研究課題名(和文)凸ゲームに付随する経験確率構造の研究

研究課題名(英文)Structures of empirical probability spaces associated with convex games

研究代表者

藤原 彰夫 (Fujiwara, Akio)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：30251359

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：凸ゲームに付随する経験確率構造および情報幾何構造を明らかにすることを目指し、以下の研究成果をあげた。(1)新規に導入したサンドイッチ型量子Renyi α -ダイバージェンスが誘導する情報幾何構造の研究を行い、それから誘導される双対構造が双対平坦となるための条件や、ダイバージェンスが同時凸性かつ単調性となる条件を明らかにした。(2)Chentsovの定理を一般の (r,s) 型テンソル場に拡張する簡潔な方法を見出し、Chentsov型の特徴付けを補完した。

研究成果の概要(英文)：Aiming at establishing empirical probability structure and/or information geometrical structure associated with convex games, we studied the following: 1) metric structure and dualistic affine connection structure induced from the Sandwiched quantum Renyi α -divergence are studied, 2) Chentsov's characterization is complemented to clarify the structure of Markov invariant (r,s) tensor fields.

研究分野：数理工学

キーワード：経験確率 凸性 情報幾何学 量子情報

1. 研究開始当初の背景

17世紀のPascalとFermatの往復書簡に始まるとされる確率論は、300年以上の時を経て、Kolmogorov流の測度論的確率論へと整備されてきた。しかし、与えられたシステムにどのような確率空間を付随させればよいのかという最も基本的な問題にすら、従来の理論体系は明確に答える術を有していない。これに対しShaferとVovkは近年、ゲーム論的枠組みを用いた経験確率の体系化を精力的に推し進めている。これはVilleのマーチンゲール理論とDawidの確率的逐次予報(prequential)システム理論とを合体・精密化した数学理論であるが、確率空間をアприオリに仮定しないという意味で確率の哲学的基礎づけとも関連した極めて野心的な試みである。特に、確率空間を全く用いることなく、対数の法則、重複対数の法則、中心極限定理などを導出し、従来の確率論的枠組みに比べ、ゲーム論的枠組みがいかに単純で柔軟な構造を有しているかを強調している。彼らは以上の成果を「Probability and Finance: It's Only a Game!」という著書にまとめている。その後Vovkは、Blackwell and Dubinsによる「意見収斂」定理と、彼自身および研究代表者による「Martin-Loefランダム系列の同値類の特徴づけ」理論を結びつけ、経験確率に対する絶対連続性の概念を提唱した。現在、Dawid、Vovk、そして研究代表者らによる共同研究の中で、経験確率の理論のさらなる深化を模索している。

2. 研究の目的

von Misesの先駆的な研究に始まるランダムネスの理論が、「確率とは何か」という問いかけと不可分な関係にあることは良く知られている。しかしながら従来のランダムネス理論は、(主として計算可能な)確率空間を前提とし、その上に構築されたものであって、確率概念そのものを規定しようという方向性は有していなかった。これに対しDawidやVovkらの着想は、prequentialシステム(あるいはゲーム論的枠組み)を介して、有限の立場から経験確率を捉えようとするものであり、計算可能性の問題は自然に回避される。本研究の目的は、DawidやVovkらの着想をさらに大胆に推し進め、より普遍的かつ汎用的な凸構造や情報理論の観点から、可能な限り確率空間の存在をアприオリに仮定しない経験確率の理論を構築し、その情報幾何構造を研究することにある。さらには、当該問題設定の汎用性を最大限に活用することで、必ずしも古典確率空間をモデル空間とする枠組みのみを対象とするのではなく、例えば量子確率空間をモデル空間とするような対象についても研究することを目指す。なお、仮に古典/量子確率空間の存在を完全に排除することができなかった場合でも、従来の情報幾何構造では捉えきれなかった新規な情報幾何構造の探究を並行

して行うことで、研究が総合的に進展するよう配慮する。

3. 研究の方法

基本的には研究代表者が単独で純理論的に研究を推進する。また、これと並行して、必要に応じ国内外の共同研究者と定期的にディスカッションを行う。さらに適宜、研究会を企画し、他の研究者とのブレインストーミングを活発に行う。こうして研究者間の情報交換を密に図ることにより、研究の行き詰まりを可能な限り回避すると共に、前項で述べたように、必要ならば研究内容や研究方向を柔軟に軌道修正しながら、研究が総合的に進展するよう配慮しつつ、研究を遂行していく。

4. 研究成果

(1) サンドイッチ型量子Renyiダイバージェンスが誘導する情報幾何構造の研究: 情報理論の分野で著名な研究者であるRenyiは1961年、新たな情報量概念として、今日、次数のRenyi相対エントロピーという概念を導入した。そして2013年にはWilde, Winter, and YangおよびMuller-Lennert, Dupuis, Szehr, Fehr, and Tomamichelが独立に、次数のサンドイッチ型量子Renyi相対エントロピーという概念を提唱した。これを受けてMosonyi and Ogawaは、この量が量子仮説検定や量子通信路符号化定理において本質的な役割を演ずることを明らかにした。ところが、彼らが用いたサンドイッチ型量子Renyi相対エントロピーは、 f が正の領域のみで意味を持つため、情報幾何学的には f -ダイバージェンスとの整合性が良くない。そこで本研究では、サンドイッチ型量子Renyi相対エントロピーを $1/f$ だけスケール変換した新たな量を導入し、これをサンドイッチ型量子Renyiダイバージェンスと命名した。そして、サンドイッチ型量子Renyiダイバージェンス自体が内包する凸構造や、そこから誘導される情報幾何構造を詳細に検討した。得られた結果を以下に列記する。

コントラスト関数: 初めに、サンドイッチ型量子Renyiダイバージェンスがコントラスト関数となっていることを証明した。ここではまず、ピンチングに関するトレース不等式を導出することで正值性を証明した。続いて等号成立条件を明らかにするため、作用素の固有値からなるベクトルに対する新たなマジョリゼーション関係式を導出し、これとピンチング不等式の等号達成条件とを組み合わせることで、サンドイッチ型量子Renyiダイバージェンスがコントラスト関数となっていることの証明に成功した。

誘導計量の単調性: サンドイッチ型量子RenyiダイバージェンスからEguchiの方法を介して誘導されるRiemann計量が、Petzの意味での量子単調計量、すなわち、

トレースを保存する完全正写像の下での単調性を満たす計量となっているための必要十分条件が、 $\alpha \leq -1$ もしくは $\alpha \geq 1/2$ であることを明らかにした。特に $\alpha = -1$ の時は実 RLD 計量、 $\alpha = 1/2$ の時は SLD 計量となることも見出した。これは、Hasegawa and Petz が導出した周知の量子計量とは一線を画し、最大の単調計量である実 RLD 計量と、最小の単調計量である SLD 計量を結ぶ単調計量のパラメタ族を（空間の一点コンパクト化を通じて）見出したことを意味し、サンドイッチ型量子 Renyi ダイバージェンスが、これまで知られていなかった量子情報幾何構造を内包していることを明らかにするものである。この事実の証明は以下のように行われた。まず、べき関数 $f(x)=x^\alpha$ に関する関数カリキュラスを用いて、その Gateaux 微分を 2 重積分で表す公式を導出した。次に、この公式を用いることで、サンドイッチ型量子 Renyi ダイバージェンス誘導する計量を与える Petz 関数 $p(x)$ を陽に同定した。下図は、誘導されるいくつかの Petz 関数 $p(x)$ の例を図示したものである。

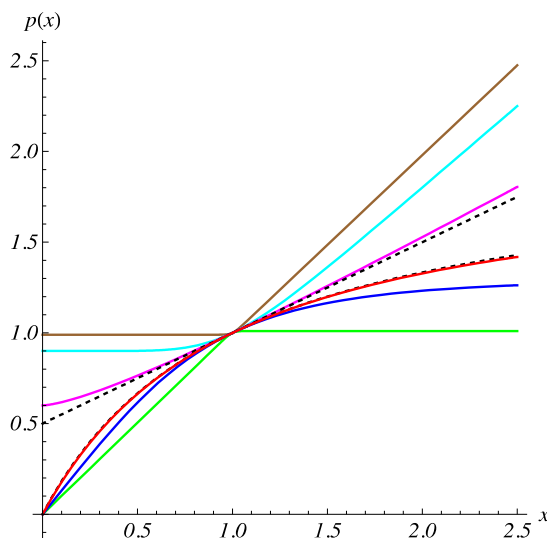


図 1 . 作用素単調な Petz 関数

図 1 において、茶色と緑色で描かれた折れ線グラフに対応する関数が、対称な作用素単調性を満たす関数の境界を表している。このような視点（実際には純粋に解析的な方法）に基づき、上で導出した Petz 関数が作用素単調関数となるための必要十分条件を調べることにより、上述の結果を得た。なお、サンドイッチ型量子 Renyi 相対エントロピーは $0 < \alpha < 1/2$ の場合には単調性を満たさないこと

が数値計算によって例証されていたが、この事実は、我々の上記定理より直ちに（解析的に）導かれることに注意しておく。

誘導接続の平坦性： サンドイッチ型量子 Renyi ダイバージェンスから Eguchi の方法を介して誘導される一組みのアフィン接続の研究を行ない、それらが定める双対構造が平坦となるための必要十分条件は $\alpha = 1$ という非常に特別な状況に限られることを見出した。この結果は、古典的 ダイバージェンスの自然な非可換拡張となっている。

同時凸性と単調性： $\alpha > 0$ の領域におけるサンドイッチ型量子 Renyi ダイバージェンスの同時凸性と単調性は Frank and Lieb によって証明されていたが、我々が拡張した $\alpha < 0$ の領域における同時凸性と単調性は、彼らの論法が適用できなかったため難航し、ようやく最終年度に解決することができた。ここでは、 $\alpha < 0$ の領域でのみ成立する逆向き Young 不等式とでも命名すべき作用素不等式を新たに導出するとともに、ユニタリ群の表現論、さらにはマジョリゼーションの理論を駆使して証明に成功した。

(2) Chentsov の定理の補完： Chentsov の定理は、古典確率分布空間上の Markov 埋め込みに関する幾何構造の不変性を満たす $(0, s)$ 型テンソル ($s=0, 1, 2$) を特徴づけるものである。研究代表者の先行研究において、一般の (r, s) 型テンソルの特徴づけに拡張できることが明らかにされている。ここではその証明をさらに洗練させることにより、上記事実の背後にあるメカニズムが、Fisher 計量による添え字の上げ下げに関する可換図式を介して簡潔に捉えられることを明らかにした。この結果は、Chentsov の定理において足りなかった視点を完全に補完するものであり、今後、一般の凸ゲームが誘導する様々な幾何構造を探究する上で、非常に重要な道標となることが予想される研究成果である。なお、当該研究成果は、現在、投稿準備中である。

本研究では、研究開始当初に目指していた「確率空間の存在を前提とせず、凸ゲームのみに立脚した経験確率空間の構造」を明らかにするという目標に直接回答する決定的な結果を得るまでには至らなかったが、「古典および確率空間の存在を仮定した場合に現れる新規な空間構造」については、いくつかの重要な知見が得られた。これらは今後、確率空間の存在を前提としないゲーム論的经验確率空間の構造を研究する上での重要な足がかり、もしくは道標となるものと期待される。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計1件)

Kaito Takahashi and Akio Fujiwara,
“Information geometry of sandwiched
Renyi α -divergence,” Journal of Physics
A: Mathematical and Theoretical, vol. 50,
165301 (2017). 【査読あり】

〔学会発表〕(計1件)

Akio Fujiwara, “Information geometry of
sandwiched Renyi α -divergence,”
Information Geometry and its Applications
IV, 2016.6.12-17, Liblice, Czech
Republic.

〔図書〕(計0件)

なし

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

なし

取得状況(計0件)

なし

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~fujiwara>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤原 彰夫 (FUJIWARA, Akio)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30251359

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

なし