

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 25 日現在

機関番号：38005

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2016

課題番号：15K13540

研究課題名（和文）3次元共形場理論の基礎と統計物理への応用

研究課題名（英文）Fundamentals of 3-Dimensional Conformal Field Theory and Their Applications to Statistical Physics

研究代表者

島田 悠彦（Shimada, Hirohiko）

沖縄科学技術大学院大学・数理理論物理学ユニット・研究員

研究者番号：20751192

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,000,000円

研究成果の概要（和文）：分子が集まると気体や液体になる。このように多数の自由度からなる系が、相互作用により如何に振る舞うかを調べるのが統計物理である。揺らぎが普遍的になる場合は共形場理論に対応するが、その3次元での理解はこれまで難しかった。本研究では、ユニタリ性という重要な仮定の役割を再検討したところ、3次元共形場理論の解析可能性が従来考えられていたよりも高いことが分かった。応用のひとつとして良溶媒中における高分子鎖の普遍的フラクタル次元が約1.7016であることを明らかにできた。

研究成果の概要（英文）：Molecules tend to form a gas or a liquid when many of them gather together. Statistical physics aims to explain how such a system behaves non-trivially when many degrees of freedom interact with each other. Conformal field theory describes such systems well when the fluctuation becomes universal, for which, however, sensible understanding has remained elusive in three dimensions until recently. We reexamine the key assumption called unitarity and find that the 3d conformal field theory is much more versatile than it was thought to be. As an application, we have estimated that the universal fractal dimension of a polymer chain in a good solvent is about 1.7016.

研究分野：統計場の理論

キーワード：3次元共形場理論、くりこみ群のフロー、普遍性クラス、高分子のフラクタル次元、共形ブートストラップ、自己回避ランダムウォーク（高分子）、非ユニタリCFT、無限振幅階層性

## 1. 研究開始当初の背景

共形場理論(CFT)は、場の理論の空間において繰りこみ群の流れがなすウェブの要(固定点)に対応し、普遍性クラスを定める。これは統計力学では普遍的な臨界指数を決めており、理論・実験双方にとって重要な拠り所となる。

ところが、空間 2 次元では Lie 代数のような予定調和的な分類と類似する CFT の深い構造が明らかにされたのに対し、実験で重要となる 3 次元では長らく進展がなかった。物理学にとっては、量子力学における「水素原子」のような非自明な基礎的模型を発明することが重要だが、3 次元 CFT の世界ではそれがとてつもなく難しかったと言える。

近年の発展は、CFT 初期の哲学に立ち返り、自らの整合性による縛りだけから理論の決定を試みるブートストラップのアイデアから興った。具体的にはユニタリ性と交差対称性を満たす解が見つかる領域を、スケーリング次元が張る平面上で数値的に描くと、なぜかその境界曲線にキंकが現れ、その位置がちょうど 3 次元 Ising 模型に対応するという驚くべき観察がなされた。すなわち上記の基礎的模型は発明というより再発見され、予期せず氷山の一角としてあぶりだされたのである。

このキंकの発見を契機に国内外で、素粒子論的・工学的興味から臨界指数の精度を向上させる研究や、5 次元以上のユニタリ CFT を探索する研究などが進んだ。一方、統計力学的に重要な模型への適用や、「ユニタリ性境界にキंकが現れる現象」自体への理解は全く進んでいなかった。

## 2. 研究の目的

本研究では、背景で述べた Ising 模型のようなユニタリ系とは質的に異なり、非ユニタリとなるべき重要な模型が統計物理には多数あることに注目し、対応する 3 次元 CFT を調べることを主な目的とした。またユニタリ性の制限を外して、非ユニタリ CFT へと対象を十分に一般化し、大局的な視点を立つことで肝心のユニタリ性境界に見つかるキंकや、「ユニタリ性の深い意味」への理解にも一石を投じることを念頭に置いた。具体的には、以下の項目を調べることを目標に設定した。

(1) 非ユニタリ系の代表的な例として、溶液中高分子鎖のモデルとなる自己回避ランダムウォーク (以下「高分子」) が挙げられる。高分子の形状を近似的に与えることについては、 $O(n)$  対称性の  $n=0$  極限 (レプリカ極限) を用いた繰りこみ群による de Gennes の仕事があり、本研究では  $n=0$  極限に対応する CFT をブートストラップ法で調べることを計画した。

(2) 統計物理の観点から Ising 模型の次に重要なユニタリ模型に、 $\mathcal{N}=1$  超対称共形場理論 (SCFT) がある。この理論は 2 次元 CFT のミニマル系列では Ising 模型に隣接し、背景で触れた喩えでは水素原子に対する「ヘリウム原子」のような位置づけにある。実際に繰りこみ群の流れで両者は繋がり、Ising CFT の励起である Majorana 粒子は、SCFT が持つ  $\mathcal{N}=1$  超対称性の自発的破れに伴う南部・ゴールドストーンフェルミオンとして理解することもできる。特に 3 次元 CFT 間の繰りこみ群の流れが、2 次元 CFT 間の流れと理論空間の幾何的にどのように連続的に繋がっているかは興味深い。従って、SCFT の具体的解析を計画した。

## 3. 研究の方法

(1) 目的で述べた「十分な一般化」を徹底して問題の理想的な形を求めるならば、少なくとも空間次元と  $O(n)$  内部対称性における  $(d, n)$  を連続的に動かして調べることは必要だろう。ブートストラップの定式化は本質的にそれが可能であるようにできている。しかし、空間次元はひとまず  $d=3$  に固定することにした。本研究の枠外に属するが、 $d=2$  と  $d=3$  のスペクトラムを繋ぐ方向の試みについては特に興味深いので、最後に簡単に述べる。

最も基本的な要請として、演算子積の推移律  $(AB)C = A(BC)$  を基本場である  $O(n)$  ベクトルについて課す。これは基本場の 4 点関数の交差対称性として定式化され、中間状態としては  $d=3$  での大局的共形ブロックを用いる。

基本場の演算子積の右辺には、 $O(n)$  表現について、シングレット (S)、2 階対称テンソル (T)、2 階反対称テンソル (A) の 3 種のセクター S, T, A が存在する。交差対称性は S, T, A セクターを互いに混合するが、この混合行列の中に  $n$  依存性が簡単な形で入る。なおこれはトラス分配関数の重複度に  $n$  が一般に量子群に関係したダイナミカルな形で入ると好対照であり、2 階テンソル (AdS/CFT では 2 粒子状態) までしか現れない、基本場の演算子積に考察を限る利点であると思われる。

この性質を用いて内部対称性の  $n$  を連続変数として取り扱い、ユニタリ性の境界を計算する。基本場  $\phi$  のスケーリング次元  $\Delta_\phi$  を動かしながら、演算子積の右辺に現れる中間状態のうち最低のスケーリング次元を持つ「基底状態」に相当するものを探す。

2 次元 CFT からの類推で基底状態は  $n>0$  においては、T セクターのスピンゼロ場であることが予想されるため、この次元  $\Delta_T$  の上限曲線をユニタリ性から決定する。具体的には 3 次元 Ising 模型に使われたのと同様な linear functional をシンプレックス法により線形最適化し、ユニタリ性を満たす交差対称性の解

が見つかる上限を求める。なおここでの上限は厳密な不等式であることに注意すべきである。問題は  $O(n)$  CFT が一般にユニタリではないのでこの不等式に縛られないことである。

しかし一方、 $O(n)$  模型の  $S$  セクターのスペクトラムは、 $n=1$  のときに 3 次元 Ising 模型のスペクトラムと完全に一致することを示すことができる。従って当然キंकを持つ。そこで本研究では、 $n$  を連続的に変化させたときの基底状態の次元  $\Delta_T$  の上限曲線に沿って、キंकに相当する何らかの特異性が現れるときは、それを実現する  $\Delta_\phi$  の周辺に CFT が存在するという自然な仮定を置いた。この妥当性については成果の項で述べる。

(2)  $\mathcal{N}=1$  SCFT の超多重項がカイラル超場の形でまとまることから、2 つのスカラ場 (基本場と  $F$  項) のスケール次元の差がちょうど 1 になると期待される。この制約とユニタリ性の両方を課すという Bashkirov の提案に従い SCFT を決定する。さらに本研究の特色である  $T$  セクターのスペクトルを解析して新たな臨界指数を決定する。

#### 4. 研究成果

(1) 以上の枠組みで、基底状態に相当するスカラ場が  $n>0$  で  $S$  セクターに存在すると仮定して探した交差対称性の解には、繰りこみ群の観点から不自然なものしか見つからないことを確認された。従って、基底状態の次元は  $\Delta_T$  であることが示された。

素朴な解析により  $\Delta_T$  の上限は  $n$  を小さくとるに従ってキंकの特徴を失うことが分かった。試行錯誤の後、特別な  $\Delta_\phi = \Delta_\phi^*$  におけるキंकの存在そのものよりも、同じ場所でスペクトラムの組み換えが起こることがさらに重要である可能性を我々は認識した。

スケール次元の無限タワーの各準位は  $\Delta_\phi^*$  の左右でヒルベルトホテルのように、隣の準位へとラベルを付け替えることが観察できる。本研究の有限タワー近似では以下のことが分かった。赤外 CFT の右側から、(自由場 CFT へと繋がる)左側に移るとき、基底状態の一個上の場は、スケール次元を階段関数状に小さくして、右側には存在しない仲間外れの場 (ヒルベルトホテルの新しい客に対応し、無限タワーの極限でゼロに収束する OPE 係数を伴ったヌル場)へと遷移する。以上から基底状態におけるキंकの存在は、準位反発の結果、 $\Delta_\phi^*$  の左側で  $\Delta_T$  が急勾配になるためと解釈することもできる。

このようにキंकからスペクトラムの組み換えへと焦点を移すことで次のような現象を発見した。 $A$  セクターの準位を調べると、カレント (スピン 1 の基底状態) の一個上にある

準位が  $\Delta_\phi^*$  の左から右へと分岐を起こす。さらにこの下分枝とカレントの間のギャップは、ある  $0 < n^* < 1$  が存在して、 $n > n^*$  では残るが  $n < n^*$  では消失することが分かった。このようなレベルダイナミクスを量子力学における Landau-Zener 遷移との類推で考えれば、 $n = n^*$  を境に、外部パラメーター  $\Delta_\phi$  をスイープするときの、カレントから一個上の下分枝への状態遷移の傾向が変わると予想される。

実際上述のように  $n$  を小さくとるに従って  $\Delta_T$  のキंकは消失するが、その反対にカレントの 2 点関数の規格化(や伝導率)に関係するカレントセントラルチャージ  $C_J$  (カレント準位の占有数の類推) が特異的な極小値を持つようになることが分かった。通常セントラルチャージ  $C_T$  の極小値は 2 次元での Zamolodchikov の  $C$ -定理との類推で 3 次元 Ising 模型の特徴づけになることが Rychkov により示されたが、本研究の発見もこれに類似している。しかし本研究では、 $C_J$  の特異的極小値と  $A$  セクターのスペクトラムの組み換えの関係を認識できたことが重要である。

上記の基底状態は 2 次元 CFT では 2-leg 場としてよく知られているもので、 $d_F = 2 - \Delta_T$  により Schramm-Loewner Evolution  $SLE_\kappa$  のフラクタル次元  $d_F = 1 + \kappa/8$  (Beffara の公式) を導く。フラクタル次元は繰りこみ群固有値と解釈でき、一般の  $(d, n)$  における分配関数において重み  $n$  を持つ粒子軌跡(ループ)のフラクタル次元を決めていることが議論できる。続く 2 段落では、 $d=3$  において新鮮なこの観点からの成果を述べる。

まず  $n=1$  において、Ising 模型のループ励起(高温展開グラフ)のフラクタル次元は 1.7346(5)と決まり、この精度はモンテカルロ法(シミュレーション)を含む他の方法による世界記録を大幅に更新した。なおこの結果は、臨界現象のクロスオーバー指数、場の理論では異方的質量項の異常次元に対応し、通常の熱力学臨界指数  $\eta, \nu$  とは独立な意義がある。

また  $n=0$  極限に対応する高分子のフラクタル次元については 1.7016(36) のように中性子散乱実験と一致する結果を得た。モンテカルロ法での精度記録には到達しなかったものの、共形不変性に基づいて臨界指数を精密に決定したのは本研究が初めてである。

(2) 方法で述べた超対称性の制約を活用し、基本場及び  $F$  項のスケール次元  $\Delta_\phi = \Delta_F - 1 \sim 0.574$  を決定した。熱力学臨界指数  $\nu$  は通常の CFT では  $\mathbb{Z}_2$  even な  $\Delta_{\phi^2}$  から決まるが、これに反して SCFT については以下のように予想した。以上の  $(\Delta_\phi, \Delta_F)$  に関する結果は Neveu-Schwartz セクターに相当し、2 次元 SCFT との類推からこの臨界指数は SCFT では  $\mathbb{Z}_2$  odd な  $\Delta_\phi$  から決まるべきであり、 $\nu \sim$

0.412 となる。対応する普遍性クラスとしては、Kitaev toric code を Ising 相互作用で拡張した系や Blume-Capel 模型の三重臨界点、トポロジカル超伝導体表面の量子相転移が候補である。また T セクターの解析により超粒子軌跡のフラクタル次元を 1.57 と見積もった。

(3) 以下で述べる成果は当初の目的を超えるが、目的のプレアンブルで述べた「ユニタリ性の深い意味」に関係するのでここで触れておくのが妥当と思われる。

高スピン対称重力との双対性の観点から  $n$  が自然数ではないときは  $O(n)$  模型が非ユニタリになることが自由場の場合に Maldacena-Zhiboedov により議論されている。また、Hogervorst-Rychkov-van Rees は  $d = 4 - \epsilon$  におけるユニタリ性の破れを摂動的に議論した。

以上をふまえて一般の連続変数( $d, n$ )における CFT を考察する大局的な視点に立つと、「完全なユニタリ性」はむしろ非常に特別な現象であるように見える。そこで、ユニタリ性が一般にどのようにして破れるかの議論が重要である。

本研究の  $d=3$  での計算は、 $n>0$  であればユニタリ性の破れは次の意味で非常に弱いことを示唆している。ここではユニタリ性の必要条件として、基本場の 4 点関数に現れる中間状態の振幅 (OPE 係数の 2 乗) が正になるという条件を用いた。交差対称性の解のうち、我々が見つけたユニタリ性を飽和する解は、実際の非ユニタリ CFT の未知解と比べて、振幅がすべて正であるという点で異なっている。しかしながら、スケーリング次元が大きい場の振幅は指数関数的に小さいために、交差対称性等式においては、ユニタリ性を破らない low-lying 場だけで絶妙なバランスが成立しており、 $n>0.1$  では非ユニタリ性が大きな問題を起こさないと解釈することができる。

以上の状況証拠から、low-lying 場の振幅が  $n=0$  に単純極を持ち、それが  $n=0$  で符号を変えるために、 $n=0$  に近づくにつれて非ユニタリ性の問題が深刻になると予想される。これを単純化した解析計算で確認しようとしたところ、思いがけず豊かな数学的内容を持っていることが分かったので以下に概説する。まず次のようなざっくりと振り返るべき反省を要した。

数値計算を補助的に用いた 3 次元のブートストラップには、ユニタリにせよ非ユニタリにせよ、まだ謎が多くて極めて重要であるが、CFT の解析計算に身をまかせたことのある研究者には手計算がなかなかできないことで少なからず不満が残る。そこで 2 次元 CFT では何が明らかにできるか考えると、「基本場の 4 点関数」は一般の  $n$  については計算方法が確立していないという重要な問題点に気がつく。

これは基本場が Virasoro 代数の縮退表現とならず、整数階の微分方程式を満たさないことに起因する。

一方、エネルギー場 (S セクターの基底状態) には対応する縮退表現が知られている。そこで基本場とエネルギー場を合わせて、混合相関関数ブートストラップに相当する計算を実行したところ、一般に無限個存在する S セクターの場 (エネルギー場の一般化) について振幅を計算することができた。

その振幅をスケーリング次元の小さい順にプロットしてみると、ゼロ点と極がツリー状の構造をなし、Escher の Circle Limit に現れるような双曲平面 (Poincare disk) に配置すると理解できる振幅階層性を持つことが分かった。ゼロ点は位数が偶数のものだけである。また、ユニタリ性の破れをひき起こす単純極の位置もすべて特定できた。特に、深刻なユニタリ性の破れを起こすのは、 $n=0$  にある単純極のためであるという先述の予想が確認できた。

ツリーの階層をたどるごとに減衰する負の振幅と、それによって生じる弱いユニタリ性の破れは興味深く、今後はこれをどのように定量的に扱って、 $d=2$  と  $d=3$  のスペクトラムを繋ぐべきかが重要な問題となるであろう。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

Hirohiko Shimada and Shinobu Hikami, Fractal dimensions of self-avoiding walks and Ising high-temperature graphs in 3D conformal bootstrap, Journal of Statistical Physics, 165 (2016) 1006-1035.

[学会発表] (計 7 件)

島田悠彦, Virasoro/ $SL(2, C)$  分解による一径数族 CFT とユニタリ性境界, 日本物理学会, 2015 年 09 月 16 日, 関西大学 (大阪)

Hirohiko Shimada and Shinobu Hikami, One-parameter fractals in 3D non-unitary CFT, the 10th Asian Winter School on Strings, Particles and Cosmology, 2016 年 01 月 09 日, OIST (沖縄)

Hirohiko Shimada, Fractal dimension of the polymers, Conformal Field Theories and Renormalization Group Flows in Dimensions  $d>2$  (Focus Week, 招待講演), 2016 年 06 月 08 日, The Galileo Galilei Institute for Theoretical Physics (GGI, Florence, Italy)

Hirohiko Shimada, Polymer dimension from fractal trajectories in 3D conformal field theory, Big Waves of Theoretical Science in Okinawa (RIKEN-Osaka-OIST Joint Workshop 2016), 2016年07月09日, OIST (沖縄)

Hirohiko Shimada, Hierarchies of Conformal Amplitudes, Workshop: Moduli space, conformal field theory and matrix models (MCM2016), 2016年10月27日, OIST (沖縄)

島田悠彦, 共形振幅の  $SL(2, \mathbb{Z})$  階層性, 日本物理学会, 2017年03月20日, 大阪大学

Hirohiko Shimada, Conformal Amplitude Hierarchies and the Poincare disk, The XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS-25), 2017年06月09日, Czech Technical University (Prague, Czech Republic)

〔図書〕 (計 0件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0件)

○取得状況 (計 0件)

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

島田 悠彦 (SHIMADA, Hirohiko)

沖縄科学技術大学院大学・数理理論物理学  
ユニット・研究員

研究者番号: 20751192

### (2) 連携研究者

氷上 忍 (HIKAMI, Shinobu)

沖縄科学技術大学院大学・数理理論物理学ユ  
ニット・教授

研究者番号: 30093298