

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 9 月 3 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K15941

研究課題名(和文)単体法は多項式アルゴリズムであるか？ 未解決問題解決への布石

研究課題名(英文)Is the simplex method a polynomial algorithm? --Steps to the unsolved problem--

研究代表者

北原 知就 (Kitahara, Tomonari)

東京工業大学・工学院・助教

研究者番号：10551260

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,400,000円

研究成果の概要(和文)：研究期間全体を通じた主な研究成果は次の通りである。(a)単体法に対する実用的なピボット規則である、最急辺降下規則について研究し、反復回数の理論的上界を初めて得ることができた。(b)線形計画問題に対するLP-Newton法に二分探索法を組み込んだ新しい方法を提案した。提案手法を解析し、反復回数についての理論的示唆を得ることができた。(c)線形計画問題に対する新しい解法であるChubanovのアルゴリズムを線形計画問題よりもより広いクラスの問題である、二次錐計画問題や対称錐計画問題に拡張したできた。(d)ある整数計画問題に対する近似アルゴリズムを開発し、その理論的性質を解明した。

研究成果の概要(英文)：The main results of this research program are as follows (They are all done through joint works). (a) We analyzed the steepest-edge rule for the simplex method, which is one of practical pivot rules. As result, We proved a theoretical upper bound for the rule for the first time. (b) We proposed a new variant of LP-Newton method. For the variant, the bisection method is incorporated. I analyzed the proposed method and obtained theoretical implications for the number of iterations of the variant. (c) We were able to extend Chubanov's algorithm, a new polynomial algorithm for linear programming problems, to more general, second order cone programming problems and symmetric cone programming problems. (d) We developed an approximation algorithm for a class of integer programming problems.

研究分野：数理計画法

キーワード：単体法 線形計画問題 多項式アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

線形計画問題は、線形の等式と不等式の制約のもとで線形関数を最大化する問題で、すべての数理計画問題の基礎をなす重要な問題である。その応用は工学的、産業的分野にとどまらず、経済学への応用に対して、ノーベル経済学賞が授与されている。

単体法は線形計画問題を解くための最も基本的なアルゴリズムであり、図形的には、目的関数値が改善するように多面体の頂点の間を移動しながら最適解を発見する。

その単純性にも関わらず、単体法は多くの現実問題を効率よく解くことができる。しかし、単体法の理論的性質については解明されていない点が多くあり、単体法が多項式アルゴリズムであるか、すなわち最も悪い場合でも、入力データの多項式の反復回数で最適解を求められるかどうかは、コンピュータ・サイエンスにおける重要な未解決問題として60余年残っている。このような状況に一石を投じたのが Y. Ye による2010年の画期的な結果である。それ以来、単体法の理論的研究に進展が見られるようになった。

単体法を状態の悪い問題(退化している問題)に対して適用すると、反復を繰り返しても同じ頂点に留まり、最適解に到達しないことがある。このような現象を巡回と呼ぶ。このような巡回現象があるため、一般に単体法が生成する頂点の数よりも単体法の反復回数のほうが大きくなる。申請者がこれまで行ってきた研究では、問題が退化していないことを仮定しない。その代わりに、従来のアプローチと異なり、単体法の反復回数ではなく、単体法によって生成される頂点の数について調べた。この新しいアプローチを使うことにより、研究代表者は単体法の理論的性質についての研究成果を得ることができた。

2. 研究の目的

既に述べたように、単体法が生成する頂点の数よりも、単体法の反復回数のほうが多い。そして、生成する頂点の数については申請者のこれまでの研究によりその上界がわかっている。本研究では、これまでの申請者の研究結果を踏まえて、未解決問題解決の布石として、以下の2点を目的に掲げる。

- ・単体法が生成する頂点の数の上界を得るための解析を発展させ、単体法の反復回数に対する明示的な上界を得る。

- ・得られた反復回数の上界を洗練させ、その質を高めることを目指す。

単体法の反復回数の上界はこれまでに得られておらず、本研究の着眼点は、申請者独自のものである。本研究の進展により、コンピュータ・サイエンスにおける未解決問題「単体法が多項式アルゴリズムであるか」に

対する有力な示唆が得られることが予想されるので、取り組む価値のある研究課題である。

3. 研究の方法

本研究では、有名な未解決問題「単体法は多項式アルゴリズムであるか」の解決を目指し、その布石を得ることを目標とする。具体的な方法として、

- ・当該分野の最新の文献の講読や学会への参加により情報収集する

- ・内点法、LP-ニュートン法、Chubanov のアルゴリズムなど、単体法以外の線形計画問題に対するアルゴリズムの理論的解析方に通曉し、単体法の理論的解析に活かすことを検討する

- ・他の研究者との議論を通じて、課題進展の示唆を得る

の3点を軸に研究を進めた。

4. 研究成果

研究期間全体を通じた主な研究成果は次の通りである。

- (a) 単体法に対する実用的なピボット規則である、最急辺降下規則について研究し、反復回数の理論的上界を初めて得ることができた。

- (b) 線形計画問題に対する LP-Newton 法について研究し、LP-Newton 法に二分探索法を組み込んだ新しい方法を提案した。提案手法を解析し、反復回数についての理論的示唆を得ることができた。

- (c) 線形計画問題に対する新しい解法である Chubanov のアルゴリズムを詳細に検討し、線形計画問題よりもより広いクラスの問題である、二次錐計画問題や対称錐計画問題に拡張できた。

- (d) ある整数計画問題に対する近似アルゴリズムを開発し、その理論的性質を解明した。

以下にそれぞれのトピックの詳細を述べる。

- (a) これまで行われてきた研究により、最急辺降下規則は、実用的に効率的な単体法のピボット規則である。しかし、その理論的性質はあまり明らかになっていなかった。研究代表者の単体法についての研究結果をもとに共同研究を行い、最急辺降下規則に対する反復回数の理論的上界を初めて導出することができた。

- (b) LP-Newton 法は、未解決の「線形計画

問題に対する強多項式アルゴリズムは存在するか」という問題を念頭に提案されたアルゴリズムである。LP-Newton 法は、線形計画問題をゾノトープを用いて表現し、ゾノトープ場への射影を繰り返すことにより、最適解に収束する点列を生成する方法である。研究代表者らは LP-Newton 法に二分探索法を組み込むことで、いくつかの仮定の下で、射影の階数が線形オーダーになることを示した。

(c) Chubanov のアルゴリズムは、線形計画問題に対する新しい多項式アルゴリズムであり、最近は多くの研究者の注目を集めている。研究代表者は共同研究により、Chubanov のアルゴリズムを線形計画問題よりも広い問題のクラスである、二次錐計画問題や対称錐計画問題に拡張した。提案したアルゴリズムを詳細に解析し、反復回数や計算量についての理論的見積もりを与えることができた。

(d) 本トピックでは、整数計画問題の中でも、制約の 1 部が満たされなくてもよいような問題を扱った。この問題を厳密に解くことは困難であるので、それを近似的に解くアルゴリズムを提案した。そして、提案アルゴリズムによって得られる解の精度の理論的な見積もりを与えることができた。

研究期間全体を通じて、研究の目的として 1 番に挙げていた「単体法が生成する頂点の数の上界を得るための解析を進展させること」は、上記 (a) の最急辺降下規則の研究で達成できたと考える。また、単体法だけでなく、LP-Newton 法や Chubanov のアルゴリズムについても研究し、線形計画問題のアルゴリズムについての理解を深めることができた。これらの他にも、関連分野である、整数計画問題に対する近似アルゴリズムについても研究し、研究結果を得ることができた。本研究を通じ、4 本の学術論文が専門誌に採択され、また、1 件の招待講演を行うなど、一定の成果を得ることができたと考える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

高澤 陽太郎、水野 眞治、北原 知就、An approximation algorithm for the partial covering 0-1 integer program、Discrete Applied Mathematics、査読有、印刷中、2017、DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.08.024>

北原 知就、土谷 隆、An extension of Chubanov's polynomial-time linear programming algorithm to second-order cone programming、Optimization Methods and

Software、査読有、33 巻、2017、1-25、DOI: <https://doi.org/10.1080/10556788.2017.1382495>

ブルノ・フィゲラ・ロウレンソ、北原 知就、村松 正和、土谷 隆、An extension of Chubanov's algorithm to symmetric cones、Mathematical Programming、査読有、印刷中、2017、DOI: <https://doi.org/10.1007/s10107-017-1207-7>

北原 知就、鮎川 矩義、A simple projection algorithm for linear programming problems、Algorithmica、査読有、印刷中、2018、DOI: <https://doi.org/10.1007/s00453-018-0436-3>

[学会発表](計 14 件)

水野 眞治、北原 知就、単体法で生成される解の数と強多項式アルゴリズム、RIMS 共同研究「組合せ最適化セミナー」(第 12 回、招待講演)、京都大学数理解析研究所(京都府京都市)、京都府京都市、2015。

北原 知就、鮎川 矩義、二分探索法を用いた線形計画問題の解法、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016 年春季研究発表会、慶應義塾大学矢上キャンパス、神奈川県横浜市、2016。

北原 知就、鮎川 矩義、上下限制約付き線形計画問題に対する二分探索アルゴリズム、研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」、政策研究大学院大学、東京都港区、2016。

高澤 陽太郎、水野 眞治、北原 知就、Partial covering 0-1 integer program に対する近似アルゴリズム、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017 年春季研究発表会、沖縄県市町村自治会館、沖縄県那覇市、2017。

ブルノ・フィゲラ・ロウレンソ、北原 知就、村松 正和、土谷 隆、対称錐に対する Chubanov のアルゴリズムの拡張、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017 年春季研究発表会、沖縄県市町村自治会館、沖縄県那覇市、2017。

ブルノ・フィゲラ・ロウレンソ、北原 知就、村松 正和、土谷 隆、An extension of Chubanov's algorithm to symmetric cone feasibility problems、研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」、統計数理研究所、東京都立川市、2017。

高澤 陽太郎、水野 眞治、北原 知就、An approximation algorithm for the 0-1 partial covering 0-1 integer program、研

研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」、
統計数理研究所、東京都立川市、2017.

ブルノ・フィゲラ・ロウレンソ、北原 知就、村松 正和、土谷 隆、An extension of Chubanov's algorithm to symmetric cones、SIAM Conference on Optimization、Sheraton Vancouver Wall Centre、Vancouver、Canada、2017.

土谷 隆、北原 知就、An Extension of Chubanov's Polynomial-Time Linear Programming Algorithm to Second-Order Cone Programming、SIAM Conference on Optimization、Sheraton Vancouver Wall Centre、Vancouver、Canada、2017.

高澤 陽太郎、水野 眞治、北原 知就、An approximation algorithm for the partial covering 0-1 integer program、SIAM Conference on Optimization、Sheraton Vancouver Wall Centre、Vancouver、Canada、2017.

高澤 陽太郎、水野 眞治、北原 知就、Generalized partial covering 0-1 integer program に対する近似アルゴリズム、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017 年秋季研究発表会、関西大学千里山キャンパス、大阪府吹田市、2017.

高澤 陽太郎、水野 眞治、北原 知就、Covering-type k-violation integer program に対する近似アルゴリズム、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018 年春季研究発表会、東海大学高輪キャンパス、東京都港区、2018.

田野 昌也、宮代 隆平、北原 知就、非退化な線形計画問題に対する steepest-edge 規則の反復回数、日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018 年春季研究発表会、東海大学高輪キャンパス、東京都港区、2018.

田野 昌也、宮代 隆平、北原 知就、非退化仮定の下での steepest-edge 規則を用いた単体法の効率について、研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」、政策研究大学院大学、東京都港区、2018.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

北原 知就 (Tomonari Kitahara)

<https://tomonari-kitahara.github.io/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

北原 知就 (KITAHARA、Tomonari)

東京工業大学・工学院・助教

研究者番号：10551260

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

水野 眞治 (MIZUNO、Shinji)

研究者番号：90174036