

令和元年6月12日現在

機関番号：82401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K15943

研究課題名(和文) 錐制約をもつ半無限計画問題に対するアルゴリズムの高速化と諸問題への応用

研究課題名(英文) Development of fast algorithms for semi-infinite programs with conic constraints and application to practical problems

研究代表者

奥野 貴之 (Okuno, Takayuki)

国立研究開発法人理化学研究所・革新知能統合研究センター・研究員

研究者番号：70711969

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本課題は、不等式や等式で特徴づけられた変数空間の中で与えられた実数値関数を最小化する、所謂、最適化問題に関する研究である。特に、無限個の不等式制約と共に錐制約という特殊な構造をもつ制約をもつ最適化問題(半無限錐計画問題)について研究を行った。

主な成果は、半無限錐計画問題もしくはそれに関連した最適化問題のKKT点を求めるためのアルゴリズムを提案したことである。ただし、KKT点とは最適解であるための或る必要条件を満たした解のことをいう。我々は提案アルゴリズムがKKT点を正しく出力するための条件について数学的な解析を行い、さらに実験を通して提案法の実際の有効性も示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

半無限錐計画問題は、有限次元インパルス応答フィルター設計などの工学上多くの重要な諸問題から自然なモデル化を通して出現することが多い。したがって半無限錐計画問題を効率的に解く方法論を立脚し、その解を与えることは、そうした諸問題を効率的な解決、もしくはその糸口を与えることになりうる。

これまで錐制約や半無限制約を別々にもった最適化問題の研究は深く行われてきた。一方、その両方を兼ね揃えた半無限錐計画問題を解くアルゴリズムの設計のためには二つの構造の特徴をうまく活かすことが重要であるものの、そうした研究は少ない。その意味で本研究で得られた手法とその理論は意義があると考えられる。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we studied optimization problems which can be expressed as the problem of minimizing a given real-valued function subject to inequality and equality constraints. Particularly, we focus on a semi-infinite conic program (SICP) which is a special class of optimization problems having infinitely many inequality constraints (semi-infinite constraints) together with conic constraints.

Our main contribution was to propose several algorithms for finding KKT points of SICPs or closely related optimization problems, where a KKT point is a solution satisfying certain technical conditions related to the problems under consideration. We analyzed conditions under which the proposed algorithms output KKT points. Moreover, we actually implemented the proposed algorithms and showed their efficiency via several numerical experiments.

研究分野：連続最適化, 数理工学

キーワード：半無限最適化 錐最適化 非凸最適化 アルゴリズム 交換法 主双対パス追跡法 半正定値錐, 2次錐 DC最適化

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の焦点である半無限錐計画問題は、有限次元インパルス応答フィルター設計や対数チェビシェフ近似などの工学上多くの重要な諸問題から自然なモデル化を通して出現することが多い。したがって半無限錐計画問題を効率的に解く方法論を立脚し、その解を与えることは、社会の諸問題を解決する糸口を与えることになる。これまで、半無限錐最適化問題は、無限個の制約の中から有限個の制約を取り出してできた最適化問題を解く離散化法や錐構造を無限個の半空間の共通部分として表現することによってできる(錐制約の無い)標準的な半無限計画問題に帰着させて解かれていた。しかしながら、これらの手法は半無制限約と錐制約がもつ構造を活かしきれておらず、両方の構造に着目した効率的なアルゴリズムを開発する余地が大きくあったものの、そうした研究は未開拓な状態であった。

2. 研究の目的

- (1) SICP の構造に着目し、より高速かつ最適解または Karush-Kuhn-Tucker 点といわれる最適性条件を満たした解への収束が数学的に保証されたアルゴリズムの開発を行う。
- (2) 開発したアルゴリズムを実際の諸問題へ適用を行い、実際の工学上の問題へ応用を行う。

3. 研究の方法

『アルゴリズム開発と収束解析』において、重要になるのが『錐制約』と『無限個の制約』の二つの数学的解析である。この解析を効率的に進めるために、錐制約を特殊でありながらも、応用上重要な錐に限定し、数学的構造がより具体的な問題に関して研究を行っていく。

4. 研究成果

主な研究成果は、半無限錐計画問題を解くためのアルゴリズムに含めて、関連した最適化問題のアルゴリズムの開発である。さて、これらは主に以下 4 項目としてまとめることができる。： (1)半正定値錐制約をもつ半無限計画問題に対する主双対パス追跡法の開発 (2) 2 次錐計画問題に対する 2 種類の新しい半無限最適化アプローチの開発 (3) 凸半無限計画問題に対する改良型交換法の開発 (4)混合整数 DC 計画問題に対する平滑化アルゴリズムの開発と円詰込み問題への応用、

(1),(2)は錐制約として半正定値錐と 2 次錐制約といわれる応用上重要な構造をもつ錐に着目した研究である。(3)は半無限計画に関して古典的なアルゴリズムである交換法の改良に関する研究である。(4)は DC 計画とよばれる、重要な構造をもつ非凸関数に関する最適化に関する研究である。この研究は、半無限計画問題に関連した非凸最適化への応用を目指して行った。

これらのアルゴリズムに関して、種々の人工問題に対して数値実験を行ったところ、理論通りに実際に動作するだけでなく、これまでに考えられてきた既存手法よりも高速および高精度な解を求めることができることが観察できた。当初の本課題の目的であった具体的な現実問題への適用に至るところはできなかったものの、それらに適用する準備はできており、それらに対しても良い振舞いが期待される。以下に、上記各項目(1)-(4)についてその学術的意義や詳しく述べる。

(1) 半正定値錐制約をもつ半無限計画問題に対する主双対パス追跡法の開発:

本研究では、無限個の凸不等式制約と有限個の半正定値錐制約のもとで連続的微分可能な関数を最小化する最適化問題(以下、SISDP と呼ぶ)を取り扱った。ここで、半正定値錐制約とは、与えられた線形な行列関数が半正定値対称行列であるという条件を意味する。SISDP 自身を解くアルゴリズムは今までに明示的に与えられてはいないものの、既存アルゴリズムの直接的な

拡張により（理論的な収束保証も含めて）得ることは難しくない。そうしたアルゴリズムの大きな特徴としては、有限個の不等式制約をもつ非線形半正定値計画問題 (NSDP) を各反復で解くことで KKT 点と呼ばれる最適性条件を満たす解への収束する点列を生成することにある。しかしながら、NSDP を逐次的に正確に解くことはしばしば高い計算コストを要する。

さて、本研究の貢献は、NSDP を解くことに頼ることなく KKT 点に収束する、より安定したアルゴリズムの提案とその理論的収束性の確立にある。具体的には、NSDP に対して知られた主双対パス追跡法のアイデアに基づき、SISDP の半正定値錐制約を対数障壁関数を通して目的関数の中に含めた半無限計画問題 (BSISDP) の KKT 点が構成するパスを追跡して、SISDP の KKT 点へと到達しようとする手法である。BSISDP の KKT 点は半正定値制約の内部にあることから、実質的に半正定値制約が無い半無限計画問題として捉えることもできる。したがって、その KKT 点を求めることは SISDP 自身の KKT 点を直接求めることよりも容易であると期待されるが、それを解くアルゴリズムは知られていない。そこで、BSISDP の KKT 点を求めるために、交換法と呼ばれる半無限最適化法の古典的な手法と非線形最適化における逐次 2 次計画法 (SQP 法) を組み合わせた手法を開発した。提案したパス追跡法は半正定値錐制約と半無限制約の特徴を両方活かしたアルゴリズムになっており、既存アルゴリズムの単純な拡張だけで得られるものではない。理論的性質として、適当な仮定の下で有限次元空間と測度空間の直積空間の中で生成された点列は SISDP の KKT 点へ弱*収束と呼ばれる収束性を持つことを証明した。

さらに提案手法に局所帰着法とよばれる、無限個の不等式制約を有限個の不等式制約で局所的に表現しながら Newton 法もしくは SQP 法を適用する古典的手法を組み込むことで SISDP の KKT 点へ 2-step 超 1 次収束と呼ばれる速い収束性を有することを示したが、この関連で証明した幾つかの数学的性質は、通常の NSDP や SDP の分野においても新しく、意義深い。

以上の結果は、2 本の論文として執筆し、国際的な論文誌に投稿し現在査読中の段階である。本研究の詳細は、(1) An interior point sequential quadratic programming-type method for log-determinant semi-infinite programs, T. Okuno and M. Fukushima, arXiv preprint arXiv:1809.08838 (2) Primal-dual path following method for nonlinear semi-infinite programs with semi-definite constraints T. Okuno, M. Fukushima arXiv preprint arXiv:1810.00353 を参照されたい。

(2) 2 次錐計画問題に対する新しい半無限最適化アプローチの開発

本研究では、2 次錐とよばれる集合を制約条件の中に含んだ 2 次錐計画問題 (Second-Order Cone Program: SOCP) に対して半無限計画法に基づいた手法を提案した。具体的には、2 次錐制約を無限個の線形不等式として表現することで SOCP を線形な半無限計画問題 (LSIP) として再定式化を行った問題に対して半無限制約に特化したアルゴリズムを適用するというものである。本研究では、2 種類のアルゴリズムを提案した。

(2)-1; 双対単体法の提案

LSIP に対する既存手法である双対単体法を適用し、いくつかの数値実験を行った。その実験の一つとして、問題データが少しずつ変化するような問題列に対して提案手法を逐次的に適用した。さらに、直前の問題の最適解を初期点とすることを 2 番目以降のすべての問題に対して行った結果、任意の点を初期点として選んだ場合に比べて計算時間や反復回数が著しく減少する所謂ホットスタート効果が見られた。SOCP に対して最も有効とされる内点法ではホットスタート効果が薄いことでよく知られる。そのため、SOCP に対してホットスタート効果のある手法を開発した意義は大きく、それは錐制約もつ半無限計画問題を主眼とする本課題においても同様である。本研究は論文として国際的論文誌である Optimization Methods & Software

に採択済である。

(2) LP ニュートン法の提案

LP ニュートン法とは、線形計画問題に対して Fujishige, et al (2009) によって提案されたものであり、ゾノトープと呼ばれる特殊な多面体錐への射影を繰り返すことで最適解へ収束する点列を生成する手法である。線形計画問題に対しては、内点法といった弱多項式時間アルゴリズムの存在はよく知られているが、強多項式時間アルゴリズムの存在の是非は未解決問題であり、LP-Newton 法は強多項式時間アルゴリズムの構築を目指して作られたアルゴリズムである。本研究では、LP-Newton 法の SOCP から得られた等価な半無限計画問題 (LSIP) の無限個の線形制約を有限緩和して得られた線形計画問題に対して LP-Newton 法を適用しながら、同時に緩和度を強めていく手法である。本研究では、元問題の SOCP が非空かつ有界な最適解集合をもつという緩い仮定のもとで、提案手法が生成した点列の任意の集積点は最適解となることを示した。さらに、双対問題を解く双対アルゴリズムの設計も行い、その収束性の解析を行った。最後に、SOCP に対して最も有効とされる主双対内点法の比較実験を行ったところ、基本的には内点法が極めて大きな優位性を示したものの、問題を構成する 2 次錐の総数が大きく、各 2 次錐の次元が小さいような問題データに対しては提案手法が計算時間に関して SOCP に対する最も有効な手法として知られる内点法を大きく上回る結果を出した。本研究は、国際的な論文誌に投稿、現在査読中である。本研究の詳細は、

Extension of the LP-Newton method to SOCPs via semi-infinite representation, Takayuki Okuno, Mirai Tanaka, arXiv preprint arXiv:1902.01004 を参照されたい。

(3) 凸半無限計画問題に対する改良型交換法の開発:

凸半無限計画問題に対する手法の一つである交換法の改良版を提案した。交換法とは、無限個の制約から適当なルールで選んだ有限個の制約をもつ最適化問題を部分問題として逐次的に解く手法である。本研究では、元問題の実行可能領域により近い形状をもった実行可能領域をもつ有限個の不等式制約からなる部分問題の構成方法を提案した。数値実験では、従来の交換法に比べて少ない反復回数で最適解に到達することが観察された。これは各部分問題の最適解が真の実行可能集合へより早く近づいていることを意味している。同様に、錐制約をもった半無限計画問題に対して本手法を適用した場合、通常の交換法よりも少ない数の錐計画問題を解くだけで最適解に到達することが期待される。以上の研究は、論文として国際的論文誌である Optimization Methods & Software に採択済である。

(4) 混合整数 DC 計画問題に対する平滑化法の開発と円詰込み問題への応用:

DC 計画問題に対して平滑化法に基づいた新手法の提案、およびその大域的収束性の数学的解析を行った。DC 計画問題とは、凸関数の差として表現される関数である DC 関数を目的関数としてもつ最適化問題であり、非常に多くの非凸計画問題がこのクラスに含まれることが知られている。そして、大域的最適解を求めることを主眼とする大域的最適化の分野の中で最も大きな成果をあげている分野といえる。本研究課題である半無限計画においても、与えられた点が実行可能か否かを判定するためには或る非凸最適化問題における大域的最適解を求めることが必要であり、その計算の効率化と精度の高さが半無限計画問題を解く上で極めて重要であるということから DC 計画の研究は半無限計画において意義があると考えられる。

さて、本研究では DC 計画において目的関数が微分不可能である場合に、逐次的に生成した微分可能な最適化問題の近似解の列を元問題の解に収束させる平滑化法と呼ばれる手法と、DC 計画における既存手法である DCA と呼ばれる手法を組み合わせたものを提案した。さらに本手法によって生成した点列が最適性条件を満たす点への収束することへの数学的証明を与えた。

なお、本研究の結果は本課題のテーマである錐制約や半無限制約をもつ場合にも対応したものとなっているばかりか、整数ギャップを生じない連続緩和を通すことによって、連続変数と離散変数に関する制約が混在した混合整数制約と呼ばれる複雑な制約にも対応したものになっている。その意味で非常に広範囲に適用できる結果を得た。応用として、本研究では、円詰込み問題と呼ばれる離散最適化問題への応用も行った。ここでの円詰込み問題とは、大円1つといくつかの小円が入力として与えられたときに、小円を選択して大円の内部に重なることなく配置しながら、配置した小円の面積を最大にすることを目的とする問題である。本研究では、この問題に対して混合整数DC計画法に基づいた新しい発見的手法を提案し、既存手法と比較して見込みある結果を得た。

本研究は、2本の論文として執筆、国際的論文誌に投稿し、現在査読中の段階である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 3 件)

無限個の錐制約をもつ半無限計画問題とその解法について、奥野貴之，応用数理 2017 年 (査読有)

Simplex-type algorithm for second-order cone programmes via semi-infinite programming reformulation, Shunsuke Hayashi, Takayuki Okuno and Yoshihiko Ito, Optimization Methods & Software 31,1272-1297,2016 (査読有)

An exchange method with refined sub-problems for convex semi-infinite programming problems, Takayuki Okuno, Shunsuke Hayashi, Nobuo Yamashita, Kensuke Gomoto Optimization Methods & Software 31,1305-1324,2016 (査読有)

〔学会発表〕(計 11 件)

A primal-dual path following method for nonlinear semi-infinite program with semi-definite constrain, Takayuki Okuno and Masao Fukushima, OR2018 conference 2018 年 9 月

A primal-dual path following method for nonlinear semi-infinite SDPs, Takayuki Okuno and Masao Fukushima, 23rd International Symposium on Mathematical Programming (ISMP) 2018 年 7 月

円詰込み問題に対する混合整数 DC 計画法に基づいた手法, 増田暁, 奥野貴之, 池辺淑子, 日本オペレーションズリサーチ学会 2018 年春季研究発表会, 2018 年

A New Approach for Solving Nonlinear Mixed Integer DC Programs Based on a Continuous Relaxation Without Integrality Gap and Smoothing Technique: Takayuki Okuno, Yoshiko Ikebe, SIAM Conference on Optimization, 2017 年

混合整数 DC 計画問題に対する整数ギャップのない連続緩和法と平滑化法を用いた手法の提案: 奥野貴之, 池辺淑子, 研究集会「最適化:モデリングとアルゴリズム」2017 年 3 月

混合整数非線形計画問題に対する DC 計画法, 奥野貴之, 池辺淑子, 松尾健太, 最適化技法の最先端と今後の展開 2016 年 8 月

A continuous DC programming approach to nonlinear mixed integer programs without integrality gaps: Takayuki Okuno, Yoshiko Ikebe, XIVth EUROPT 2016 Workshop on ADVANCES IN CONTINUOUS OPTIMIZATION, 2016 年 7 月

A Continuous DC Programming Approach to Nonlinear Mixed Integer Programs, Takayuki Okuno, Yoshiko Ikebe, The Fifth International Conference on Continuous Optimization of the Mathematical Optimization Society, 2016 年 7 月

半正定値錐制約をもつ半無限計画問題に対するパス追跡型アルゴリズム, 奥野貴之, 第 27 回 RAMP シンポジウム 2015 年 10 月

半無限半正定値計画問題に対する主双対パス追跡法: 奥野貴之, 京都大学数理解析研究所 研究集会「新時代を担う最適化:モデル化 手法と数値計算」2015 年 8 月

Primal-Dual Path Following Method for Solving Linear Semi-Infinite program with semi-definite constraints: Takayuki Okuno, The 22nd International symposium on mathematical programming, 2015 年 7 月

〔その他〕

ホームページ等

<https://sites.google.com/view/takaoku-web-page/english-page>

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：福嶋雅夫，林俊介，山下信雄，田中未来

ローマ字氏名：Fukushima Masao, Hayashi Shunsuke, Yamashita Nobuo, Tanaka Mirai

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。