様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １１ 日現在

機関番号：２２６０４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１７０８７

研究課題名（和文）非正規分布を中心とする漸近展開法による近似に関する研究

研究課題名（英文）Researches on Asymptotic Expansion Approaches around Non-Gaussian Distributions

研究代表者
竹原　浩太（Takehara, Kohta）

首都大学東京・社会科学研究科・准教授

研究者番号：７０６１１７４７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，実務に於いて重要な課題である現実的なモデル下でのデリバティブ評価やリスク管理に於いて，有用な方法として知られる「漸近展開法」を対象とした．分布の中心が正規分布に限られていた従来法を拡張し，分布が既知である幅広いクラスの確率過程を中心とした一般的な近似法の確立とその求解，構造の分析を行った．
その結果，確率微分方程式の求解問題を，近似の補正項を中心項に射影することで，階層構造を持つ無限個の常微分方程式の問題へと帰着し，解析近似解を得た．
これにより，平均回帰性を持つλ-SABRモデルのoriginal SABRモデル周りでの展開等，実務的に興味深い例で精度がよく解釈も容易な近似解を得た．

研究成果の概要（英文）：In this research, we analyse "an asymptotic expansion approach," known as a useful tool for practitioners in pricing derivatives or risk managements. Especially, we extend the "original" approach which expands the target process around Normal distribution, to the ours expanding the target around more general stochastic processes whose distributions are available. We also try to analyse the mathematical structures in our expansion.
As a result, the underlying problem for solving the stochastic differential equation is transformed into the problem for solving infinite numbers of ordinary differential equations with hierarchical dependence, via projecting correction terms onto the "central" terms in our expansion.
To confirm usefulness and accuracy of our proposing technique, it is applied to practically important examples, such as an expansion of lamuda-SABR model with mean-reversion around original SABR model, and satisfactory results are observed.

研究分野：ファイナンス，金融工学

キーワード：漸近展開法　解析近似解　オプション価格解　SABRモデル

１．研究開始当初の背景

金融派生証券，いわゆるデリバティブと呼ばれる金融商品の重要性は今世紀に入りますます大きくなり，リーマン・ショック等の経済危機をふまえ正確な運用・リスク管理等の重要性は一層増していると言える．そうした適切な運用・管理の大前提となるのが正確かつ迅速な価格評価（プライシング）であり，そのためには現実を捉える正確なモデルの下で，高速化の進むトレーディングやリスク管理における膨大な計算量（モデルパラメータを変化させての再評価やストレス・テスト等）に耐えうる十分な計算速度の下に正確な計算を行う必要があるが，得てしてこれらの目標は重大な二律背反を抱えている．こうしたモデルの下では最も単純な構造を持つ European 型のオプションですら解析価格式を持たないことが殆どであり，そのため通常偏微分方程式の数値解法やシミュレーション等の計算負荷の高い数値的解法に頼らざるを得ない．

こうした計算負荷を避けるために利用される，（瞬時に評価できる）解析的な価格式を近似的に計算する手法の中でも近年特に実務家・研究者の双方から注目を集めるのが**「漸近展開法」**であった．本手法は確率過程の（弱）解に対して近似を与える手法で，数学的には Malliavin 解析における渡辺・吉田理論に背景を持ち，主に正規分布を中心とした近似を用いる方法として，幅広いモデルに適用可能な形で既に確立されていた．またこの研究に先立つ一連の研究に於いて，高次の展開項を任意の次数まで計算する具体的な手順も構成されていた．

このように計算方法自体は既に確立しているため理論的には何次までも展開可能である一方で，精度の向上を高次展開にのみ依存すると次のような問題が生じる場合もある：(1)変数が多いモデルの場合高次項は計算が複雑化しやすい（次元のべき乗のオーダーで計算項が増える場合もある）(2)近似対象の分布が正規分布と大きく異なる場合実用可能な近似精度を達成する為に相当の次数の展開が必要となる．

このような実務運用上の問題が本研究の主たる背景であった．

２．研究の目的

そこで本研究では，実務上計算負荷が高くなりやすい高次項に至らずとも，低次までの展開方法を工夫することにより，少ない計算負荷で高い近似精度を達成することを目的とした．

より具体的には，精度向上の手段を，これまで近似の中心であった「正規分布」以外の分布を近似の中心項とすることにより，実務上見られるように真の分布が正規分布から「遠い」分布であっても，それに近い分布を中心に据え低次項の精度を上げる，という方法に絞った．そのうえで，この方向性について

(1)中心に据えることができる分布の範囲
(2)その計算可能性（具体的な計算手順）
(3)妥当性（数学的背景や誤差評価など）

といった複数の観点から分析を行うことを目的とした．

３．研究の方法

本研究では漸近展開法を基礎としているが，この手法は次の図に示す通り確率微分方程式の確率項を、正規分布を中心に微小な係数に関して展開し近似する手法であり、原理的には何次までも展開できることが知られている．

$$dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$ 近似対象となる元のSDE

<u>*従来の漸近展開法（正規分布回り）*</u>

$$dX_t^{(\epsilon)} = \mu(\epsilon, X_t^{(\epsilon)}, t)dt + \epsilon\sigma(X_t^{(\epsilon)})dW_t$$

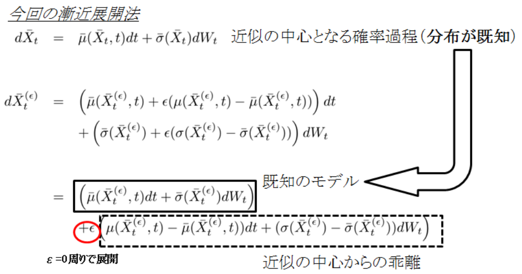
$$\Big\Downarrow \quad \varepsilon=0\text{周りで展開}$$

$$dX_t^{(0)} = \mu(\epsilon, X_t^{(0)}, t)dt$$

$\boxed{\text{通常のODE+正規分布+補正項}}$

一方，本研究では次段の図に示す通り，まず近似の中心として分布が既知である（しかし正規分布とは限らない）確率過程を特定し，その分布と真の分布の乖離がゼロ，すなわち分布が既知の確率過程の周りで展開するアプローチをとった．これは，中心となる確率過程を確定的な ODE の解とすれば，従来の漸近展開法に一致するため，既存研究を包含する拡張した概念といえる．

こうして作られた，分布が既知であり近似の中心となる確率過程と，真の確率過程との「間」で近似された確率過程に対して，



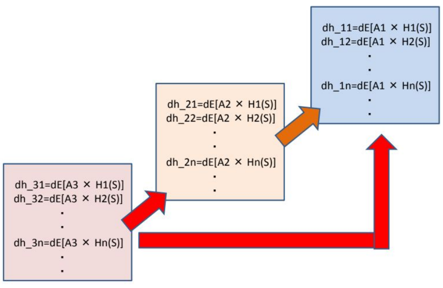
(1)その分布の解析的求解
(2)数学的な背景の整理
(3)得られた結果の精度検証や計算負荷の比較

を通して，有効性や妥当性を検証することとした．特に(3)については代替手法である偏微分方程式の数値解法やモンテカルロ・シミュレーションとの比較を、プログラムを通じた数値実験を行うことで実行した。（なお精度評価に必要な「真の価格」に関しては、十分な回数の計算を行えば収束が保証されている数値的解法を用い、大きな回数を繰り返した後に得られたものを真値の代用としている）

４．研究成果

上記のようなアプローチのもとに展開を行った結果，まず理論面として大きく次のようなことが分かった．

(1)従来の漸近展開法同様，補正項を近似の中心項（従来のアプローチの正規分布項に対応）に対して射影することで，分布の求解問題を常微分方程式の問題に帰着可能
(2)前述の常微分方程式は，先行研究（高次近似項の計算方法の確立）の際に現れたものと同じ階層的構造を持つ
(3)正規分布を中心とする従来法の場合には，その常微分方程式は有限個であり厳密に解くことが可能であるが，今回のケースでは一般に（階層構造を持つ）無限個の微分方程式となり（下図参照），これを解く際にもう１段近似が必要
(4)従来法において見られた特徴を包含する，拡張となる形になっている



無限個の常微分方程式による階層構造

このように，確率微分方程式（またはその分布）の求解問題を，無限個の階層的常微分方程式の求解に変換して，近似解を求めることができることが分かった．この方法は従来の方法を包含する形で整理されており，その意味でも単なる計算ではなく数学的背景を持っているといえる．

また，得られた近似解は，一律に正規分布を中心とするため解釈が難しいケースもみられる従来法に比べ，中心に据える確率過程に任意性があるため，その分解釈しやすい解を得ることができる．これは実務運用上大変重要な特徴であることを強調しておきたい．

このような結果の例として，

(1)（実務上非常によく用いられる確率的ボラティリティモデルの一つ）SABR モデルの CEV モデルの周りでの展開
(2)SABR モデルの zero-correlation（原資産とボラティリティが瞬間的に無相関）の周りでの展開
(3)（original SABR にはない平均回帰性を持つ）λ-SABR モデルの，original SABR の周りでの展開

などを行い，特に低次の近似で従来法よりも精度のよい近似が得られることを数値実験に於いて確認した．

また，この結果を

(4)ナノデバイスの制御等で用いられる，時間遅れ付きの確率微分方程式の分析

にも応用し，その解の振る舞い等について興味深い知見を得ることができた．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

1.Hiroyasu Ando, <u>Kohta Takehara</u>, and Miki U. Kobayashi,
“Time-delayed feedback control of diffusion in random walkers,”
Phys. Rev. E 96, 012148-012153, 2017, 査読あり

〔学会発表〕（計　5 件）

<u>1.Kohta Takehara</u>,
“Approximation for Time-Delayed SDEs,”
制御工学セミナー, 2018.

<u>2. Kohta Takehara</u>,
“SABR model expansion around zero correlation,”
ファイナンス経済セミナー, 2017.

<u>3. Kohta Takehara</u>,
“An Asymptotic Expansion Approach around Non-Gaussian Distributions,”
ファイナンス経済セミナー, 2016.

<u>4.Kohta Takehara</u>,

“An Asymptotic Expansion Approach around Non-Gaussian Distributions,”
丸の内 QF セミナー, 2016.

5.Kohta Takehara,
“An Asymptotic Expansion Approach around Non-Gaussian Distributions,”
Quantitative Methods in Finance, 2015.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等
https://www.tmu.ac.jp/stafflist/data/ta/12787.html

６．研究組織
(1)研究代表者
竹原　浩太（TAKEHARA KOHTA）
首都大学東京・社会科学研究科・准教授
研究者番号：70611747

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし