様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 5 月　 8 日現在

機関番号：11101
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：15K17503

研究課題名（和文）非可換次数付き孤立特異点に付随する三角圏の構造解析

研究課題名（英文）Studies of the structure of triangulated categories associated with noncommutative graded isolated singularities

研究代表者
上山　健太（Ueyama, Kenta）

弘前大学・教育学部・講師

研究者番号：30746409

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：代数幾何学や多元環の表現論等の様々な分野で三角圏が重要な役割を果たしている．特に，孤立特異点に付随する三角圏の研究は飛躍的な発展を遂げている．本研究では，非可換次数付き孤立特異点の研究，及び，非可換次数付き孤立特異点に付随するアーベル圏や三角圏の研究に取り組んだ．主たる成果としては，AS-Gorenstein孤立商特異点上次数付き極大Cohen-Macaulay加群の安定圏はtilting対象を持ち，有限次元代数の導来圏で実現されることを証明した．また，非可換次数付き孤立特異点に付随する非可換射影スキームが非可換射影空間として実現されるための条件を与えた．

研究成果の概要（英文）：Triangulated categories are increasingly important in many areas of mathematics including algebraic geometry and representation theory of algebras. In particular, triangulated categories associated with isolated singularities have made rapid progress. In this research, I studied noncommutative graded isolated singularities, and abelian categories and triangulated categories associated with them. As main achievements, I proved that the stable category of graded maximal Cohen-Macaulay modules over an AS-Gorenstein isolated quotient singularity has a tilting object and therefore it is triangle equivalent to the derived category of a finite dimensional algebra. Also I gave conditions for the noncommutative projective scheme associated with a noncommutative graded isolated singularity to be realized as a noncommutative projective space.

研究分野：非可換代数幾何学

キーワード：非可換次数付き孤立特異点　三角圏　安定圏　非可換射影スキーム　非可換射影空間

１．研究開始当初の背景

非可換代数幾何学という研究分野は，1990 年頃 M. Artin らによって創設され，欧米を中心に活発に研究が行われている．誕生当初から代数幾何学，可換環論等の様々な分野と密接に関係し刺激しあってきたが，近年，多元環の表現論との接点が広がり，ますます世界的に発展している．その中で，非可換代数幾何学と諸分野を繋ぐ重要な役割を担っているのが三角圏であり，特に，非可換射影スキームの導来圏と AS-Gorenstein 代数上次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群の安定圏は注目されている．

一方，代数幾何学や整環の表現論において，孤立特異点が良い振る舞いを見せることはよく知られている．孤立特異点に関する理論を非可換でも展開することを目的に，研究代表者は「非可換次数付き孤立特異点」という概念を先行研究で導入した．非可換代数幾何学的な視点で非可換次数付き孤立特異点を定義したことによって，非可換次数付き孤立特異点の研究は，孤立特異点に関する様々な結果の非可換次数付き版を生み出し，それだけでなく，既存の結果に非可換代数幾何学的な新しい解釈を与えるということが分かってきている．

２．研究の目的

背景で述べたことを踏まえ，本研究課題では，非可換次数付き孤立特異点に付随する三角圏の構造解析に取り組むことを目的とする．具体的には，次の研究に取り組む．

(2.1) 次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群の安定圏の構造解析について

安定圏の構造解析は，1980 年代後半から，（特に有限次元代数や可換環の場合に）非常に多くの研究者によって取り組まれ，現在でも発展を続けている．本研究課題では「AS-Gorenstein 孤立特異点上次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群の安定圏はいつ有限次元代数の加群圏の導来圏で実現されるか？」という問題を考察する．

(2.2) 非可換射影スキームの導来圏の構造解析について

本研究課題では「AS-Gorenstein 孤立特異点に付随する非可換射影スキームが与えられたとき，それが AS-regular 代数に付随する非可換射影スキームと導来同値となるのはいつか？」という問題を考察する．AS-regular 代数はホモロジー代数的に定義される非可換次数付き正則代数（多項式環の非可換類似）であり，特別に良い（自明な）非可換次数付き孤立特異点である．AS-regular 代数に付随する非可換射影スキームは非可換射影空間と呼ばれており，非可換代数幾何学で盛んに研究されている対象である．この問題が解決されれば，非可換次数付き孤立特異点の問題を非可換射影空間の観点から考察することが可能となる．

(2.3) AS-regular 代数の分類について

AS-regular 代数は非可換代数幾何学の創設当初から主要な研究対象であり，様々な結果が知られている．中でも，AS-regular 代数の分類は中心的な研究課題として多くの研究者に取り組まれてきた．4 次元以上の場合の分類は今でも完成していないが，分類問題の発展をモチベーションに様々な観点から AS-regular 代数を研究した結果，この代数の持つ非常に良い性質が分かってきたという一面がある．本研究でも，(2.2)からの応用を見据え，AS-regular 代数の理論の発展，特に，分類問題への貢献を試みる．

３．研究の方法

それぞれの目的に対し，次に述べる方法で研究に取り組む．

(3.1) 次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群の安定圏の構造解析について

AS-Gorenstein 孤立特異点の中でも重要なクラスである，AS-Gorenstein 孤立商特異点（Koszul AS-regular 代数の有限群作用による不変式環が AS-Gorenstein 孤立特異点であるとき）に焦点を当てて(2.1)の問題を考察する．これは，伊山-高橋の定理が非可換でも成立するかという問いを考察することになる．

(3.2) 非可換射影スキームの導来圏の構造解析について

まず導来圏レベルでなく，アーベル圏レベルで(2.2)の問題を考える．つまり「AS-Gorenstein 孤立特異点に付随する非可換射影スキームが非可換射影空間とアーベル圏として同値となるのはいつか？」という問題を考察する．アーベル圏として非可換射影空間と同値であることが得られれば，そこから導来圏同値を導くことができる．多元環の表現論や代数幾何学の様子をみて，cluster tilting 加群の存在や例外列（exceptional sequence）の存在が密接に関係しているだろうと予想しているため，その関係性を深く考察する．

(3.3) AS-regular 代数の分類について

先述の通り，4 次元以上の AS-regular 代数の分類は完成していない．打開策の一つに，良いクラスの分類から手を付けるということが考えられる．そこで本研究では，Calabi-Yau 代数と呼ばれる，AS-regular 代数の中でも良い対称性を持つクラスに着目する．特に， 4 次元 Calabi-Yau 代数の分類の足掛かりとして，superpotential を使った 3 次元 Calabi-Yau 代数の分類に注目する．最近，毛利-Smith が superpotential を使って 3 次元 quadratic Calabi-Yau 代数を研究・分類している．3 次元 Calabi-Yau 代数は

quadratic か cubic になるため，毛利-Smith のような superpotential を使った研究を cubic でも展開できるかを考察する．

４．研究成果

非可換次数付き孤立特異点及びそれに付随する三角圏に関する研究を行い，次の成果を得た．

(4.1) 次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群の安定圏の構造解析について

まず，毛利出氏の共同研究で，AS-Gorenstein 孤立商特異点上次数付き極大 Cohen-Macaulay 加群の安定圏に tilting 対象が存在することを証明した．その結果，上記の三角圏は有限次元代数の導来圏で実現されることを証明した．この結果は伊山-高橋の定理の一般化である．証明手法は伊山-高橋と異なり，非可換代数幾何学的な考察（特に，先行研究である後述の[発表雑誌論文⑤]の手法）を介したことで，Orlov 埋め込み，BGG 対応，Beilinson 対応等との繋がりを明確にした，より概念的な証明を与えることに成功した．この結果は後述の[発表雑誌論文④]として出版されている．

また次なるステップとして，非可換超曲面の研究も行い，有限 Cohen-Macaulay 表現型についての結果を得た．先行研究として，有限 Cohen-Macaulay 表現型ならば非可換次数付き孤立特異点であることが，後述の[発表雑誌論文⑦]で既に得られている．また，可換の場合，Gorenstein 環かつ有限 Cohen-Macaulay 表現型ならば超曲面になることが Herzog の定理として知られており，Cohen-Macaulay 加群の安定圏の分類で重要な役割を担っている．本研究では「(非可換) Koszul 代数を 2 次の正規正則元で生成されたイデアルで割った剰余代数が，AS-Gorenstein かつ有限 Cohen-Macaulay 表現型のとき非可換超曲面になる」ということを証明した．この結果は Herzog の定理が，部分的には非可換でも成立することを主張している． 現在，一般化や応用を検討しているところであり，それが完了次第，論文としてまとめる予定である．

(4.2) 非可換射影スキームの導来圏の構造解析について

まず，整環の表現論や非可換クレパント解消で最近注目を浴びている cluster tilting 加群が，(3.2)の問題でも役立つだろうと予想し，考察した．その結果，AS-Gorenstein 孤立特異点が良い cluster tilting 加群を持つとき，その非可換射影スキームは非可換射影空間として実現されることを証明した．この結果は後述の[発表雑誌論文②]として出版されている．

その後，毛利出氏との共同研究で，(3.2)の問題をより一般の設定にした問題「与えられたアーベル圏が非可換射影空間と圏同値になるのはいつか？」の解決に取り組み，答えを与えることに成功した．この研究で我々は「相対螺旋（relative helix）」という例外列に関連した新しい概念を導入した．その上で，「与えられたアーベル圏が非可換射影空間と圏同値になるかどうかは，そのアーベル圏に，“幾何的充満相対螺旋を作り出す豊富な代数的組”が存在するか否かで特徴付けられる」ということを証明した．

さらに，上記の結果を非可換射影二次曲面に応用する研究にも取り組んだ．その結果，良い非可換射影二次曲面は，幾何的充満相対螺旋を作り出す豊富な代数的組を持ち，非可換射影空間として実現されるということを示すことができた．

今回の研究で得られた研究結果は，非可換代数幾何学とその他の分野を繋ぐ新たな架け橋となることが期待できる．実際，二次曲面のような射影空間とは異なるものでも，非可換代数幾何学的には非可換射影空間として捉えられるということを示している．中でも，アーベル圏が非可換射影空間で実現されたとすると，その導来圏は tilting 対象を持つことが分かり，Beilinson 代数のような有限次元代数の導来圏と三角圏同値になることが従う．これより，有限次元代数の表現論の観点からも考察できるようになる．こういった手法はこれまでの研究でも有効に働いており，今回得た結果によって，今後より幅広い応用が期待できる．上で述べた非可換射影空間の特徴付け及び非可換射影二次曲面への応用は論文としてまとめてあり，学術雑誌に投稿中である．プレプリントは [arXiv:1708.00167]にて公開されている．

(4.3) AS-regular 代数の分類について

毛利出氏との共同研究で，3 次元 cubic Calabi-Yau 代数の分類とその応用についての研究を行った．もう少し詳細に言えば，superpotential を使って 3 次元 cubic Calabi-Yau 代数の同型を除いた分類を与え，その分類を応用して，点スキームやホモロジカル行列式に関する結果を得た．点スキームは非可換代数の点の情報を表す（可換な）幾何であり，非可換代数幾何学では欠かせない情報である．本研究では，3 次元 cubic Calabi-Yau 代数の点スキームの分類を与えた．ホモロジカル行列式は，AS-regular 代数の不変式論（非可換不変式論）で導入された，代数自己同型に対してホモロジー代数的に定まる不変量である．標準次数付き多項式環に作用する自己同型を行列とみなしたとき，この不変量は行列式と一致するため，この名がついている．ホモロジカル行列式は不変式環（商特異点）の性質を知るために重要な値だが，計算するのは一般的に困難である．本研究では 3 次元 cubic Calabi-Yau 代数の自己同型のホモロジカル行列式を計算するための公式を与えた．

この研究は，毛利-Smith による 3 次元

quadratic Calabi-Yau 代数の研究の続きにあたるが，quadratic の場合と類似の結果も異なる結果も得られた．これらは一般の（特に4次元の）Calabi-Yau 代数の理論を構築していく上で有意義なデータになると考えている．この研究成果は論文としてまとめてあり，学術雑誌に投稿中である．プレプリントは[arXiv:1606.00183]にて公開されている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① Izuru Mori and Kenta Ueyama, When is an abelian category a quantum projective space?, Proceedings of the 50th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (2018), 131-136, 査読無

② Kenta Ueyama, Cluster tilting modules and noncommutative projective schemes, Pacific J. Math. 289 (2017), no. 2, 449-468, 査読有
DOI: 10.2140/pjm.2017.289.449

③ Kenta Ueyama, 3-dimensional cubic Calabi-Yau algebras and superpotentials, Proceedings of the 49th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (2017), 155-169, 査読無

④ Izuru Mori and Kenta Ueyama, Stable categories of graded maximal Cohen-Macaulay modules over noncommutative quotient singularities, Adv. Math. 297 (2016), 54-92, 査読有
DOI: 10.1016/j.aim.2016.04.009

⑤ Izuru Mori and Kenta Ueyama, Ample group action on AS-regular algebras and noncommutative graded isolated singularities, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 10, 7359-7383, 査読有
DOI: 10.1090/tran/6580

⑥ Izuru Mori and Kenta Ueyama, Tilting objects for noncommutative quotient singularities, Proceedings of the 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory (2016), 107-113, 査読無

⑦ Kenta Ueyama, Noncommutative graded algebras of finite Cohen-Macaulay representation type, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), no. 9, 3703-3715, 査読有
DOI: 10.1090/proc/12527

〔学会発表〕（計１２件）

① 毛利出，上山健太，非可換射影空間の圏論的特徴付け，日本数学会 2018 年度年会，東京大学，2018 年 3 月 20 日

② 上山健太，非可換射影空間の圏論的特徴付けについて，第８回（非）可換代数とトポロジー，信州大学，2018 年 2 月 21 日（招待講演）

③ 上山健太，An introduction to noncommutative projective schemes 1, 2, 第 23 回大和郡山セミナー，奈良工業高等専門学校，2017 年 12 月 2 日（招待講演）

④ Izuru Mori and Kenta Ueyama, When is an abelian category a quantum projective space?, The 50th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, Yamanashi University, October 9, 2017

⑤ Kenta Ueyama, Noncommutative projective schemes having a homogeneous coordinate ring of finite global dimension, RIMS workshop: Noncommutative Algebraic Geometry and Related Topics, Kyoto University, September 27, 2017（招待講演）

⑥ 毛利出，上山健太，3-dimensional noetherian cubic Calabi-Yau algebras, 日本数学会 2017 年度年会，首都大学東京，2017 年 3 月 27 日

⑦ 上山健太，Graded endomorphism algebras of cluster tilting modules, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会，関西大学，2016 年 9 月 15 日

⑧ Kenta Ueyama, 3-dimensional cubic Calabi-Yau algebras and superpotentials, The 49th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, Osaka Prefecture University, September 1, 2016

⑨ 毛利出，上山健太，Tilting theory for noncommutative quotient singularities 日本数学会 2016 年度年会，筑波大学，2016 年 3 月 19 日

⑩ 上山健太，Cluster tilting modules in noncommutative projective geometry 1, 2, 第 17 回静岡代数学セミナー，静岡大学，2015 年 12 月 18 日（招待講演）

⑪ Izuru Mori and Kenta Ueyama, Tilting

objects for noncommutative quotient singularities, The 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, Nagoya University, September 10, 2015

⑫ Kenta Ueyama, Stable categories of graded maximal Cohen-Macaulay modules over noncommutative quotient singularities, The Seventh China-Japan-Korea International Conference on Ring Theory, Zhejiang University of Technology, Hangzhou, China, July 2, 2015

〔図書〕（計０件）
なし

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
なし

○取得状況（計０件）
なし

〔その他〕
ホームページ等
http://siva.cc.hirosaki-u.ac.jp/usr/ueyama/

６．研究組織
(1)研究代表者
上山　健太（UEYAMA, Kenta）
弘前大学・教育学部・講師
研究者番号：30746409

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし