

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：11101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17504

研究課題名(和文)種々の数表現を通した数論的性質の解明

研究課題名(英文)Number representations and arithmetical properties of the numbers

研究代表者

立谷 洋平(Tachiya, Yohei)

弘前大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：90439539

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：ランベルト級数の q 進法展開における局所的な振る舞いを記述するエルデスの定理を精密化し、ディリクレ指標に付随する二項回帰数列の逆数和に対する無理性や線形独立性に関する定性的な結果を得た。また並行して、関数自身の数論的性質についても研究を進め、与えられた関数が超越関数となるための十分条件を与えた。

さらに、ある種の古典的なテータ関数に対して、それらの間の代数的関係式を導くアルゴリズムを定式化し、具体的な関係式を計算して求めた。応用として、テータ関数値の代数的独立性やランベルト級数の超越性が得られた。

研究成果の概要(英文)：We studied and obtained a refinement of Erdos's theorem(1948), which gives some structural properties for the q -ary expansion of Lambert series. In particular, we obtained linear independence results for the reciprocal sums of binary recurrences associated with Dirichlet characters. Furthermore we investigated arithmetical properties for some analytic functions and showed that taking an asymptotic viewpoint allows one to prove much stronger transcendence statements in many general situations.

We also studied algebraic properties of the classical theta-constants and gave explicit algebraic dependence relations in some particular cases. This yields algebraic independence results for certain values of the theta-constants and the transcendence results for certain Lambert series.

研究分野：数物系科学

キーワード：整数論 無理数 超越数 ランベルト級数 テータ関数 保型形式

1. 研究開始当初の背景

実数を表現する古典的な方法として q 進法展開がある。例えば、我々が日常生活において最もよく使用している数値の表現方法は、 $q=10$ の場合の 10 進法展開である。一般に、与えられた実数に対して q 進法展開を求めるアルゴリズムは知られているが、その展開に現れる数列の性質(周期性、乱数性など)を調べることは容易ではない。この種の問題は、実数の数論的性質(無理性、超越性など)の解明に直結すると共に、不定方程式の解の情報を与えるディオファントス近似や、実数の正規性にも深く関わり、整数論の分野において重要な問題として位置づけられている。

1948 年、P.Erdős は素数定理を応用して、 q 進法展開の局所的な挙動を調べる手法を開発した。彼はランベルト級数やテータ関数をはじめとした関数を取扱い、 q 進法展開の非周期性を示すことにより関数値の無理性を導いた。その後、P.Borwein(1991,1992)は、多項式による関数の近似法(パデ近似)、および複素関数論における留数定理を応用した有理近似法により、Erdős の結果を包括する幅広い数の無理性を導くことに成功した。2000 年代に入ると、研究代表者(2004)や P.Bundschuh-K.Väänänen (2005)らによって、Borwein の近似法の改良が進められ、ある種の無限級数についての高次無理性や線形独立性、また独立測度に関する定量的な結果が明らかになった。しかし、Borwein の系譜による手法においては、扱える関数が有限個に限られており、線形独立として導出される数の個数には一定の制約があった。

この問題を解決すべく、研究代表者は Erdős の手法を再び見直し、等差数列上の素数分布に関する結果(参考文献 [1])を援用することにより、Florian Luca 氏との共同研究の下、 q 進法展開の周期性を判定する新たな手法を開発した(参考文献 [2])。本手法によって、「有理数体上で線形独立となるランベルト級数の無限集合」が多様に存在することが判明し、またその集合の具体例についても明示することができた。この結果は、ランベルト級数の無理性に関する Erdős の予想について部分的な解決を与えるものであり、本手法の更なる発展・応用が期待されていた。

参考文献

[1] W. R. Alford, A. Granville, and C. Pomerance, There are infinitely many Carmichael numbers. *Ann. of Math.* Vol. 139, 1994, 703-722.

[2] F. Luca and Y. Tachiya, Linear independence of certain Lambert series.

Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 142, 2014, 3411-3419.

2. 研究の目的

以上の研究背景を踏まえ、本研究では主な目的として以下の二つを掲げた。

第一は、近年、研究代表者らにより開発された無理性や線形独立性を導く判定法を、種々の数系上で応用し、幅広いクラスの数に対する数論的性質を明らかにすることである。上述した q 進法展開の非周期性を導く判定法は、Eröds 以降、展開の基数が有理整数の場合に限定されて応用されてきたため、無理性以上の結果は期待できない状況であった。本研究においては、この枠組みを取り払い、展開の基数が代数的整数の場合も含めて考察し、高次無理性や、より一般の代数体上における線形独立性などの結果を導くことを目指した。

第二の目的は、ラマヌジャン関数の値の代数的独立性に関する Yu. V. Nesterenko の結果(1996)の応用を充実させることであった。ある種のランベルト級数は、アイゼンシュタイン級数やテータ級数と関わりが深く、保型形式論における重要な関数と結びつく。従って、その方面における Nesterenko の結果の応用を、より豊富に与えることができれば、ランベルト級数についても超越性などの強い結果が引き出せることは十分に期待できる。本研究では、この観点から、古典的なテータ関数に着目し、特殊値の間の代数的関係や、代数的独立性(代数的関係の非存在)について明らかにすることを目指した。

3. 研究の方法

第一の研究目的の達成のため、展開の基数をピゾ数とする場合について考察した。一般に、代数的整数を展開の基数とする場合、有理整数の場合と異なり、「桁あがり」の現象が複雑化するとともに、新たに「桁さがり」の問題も発生する。本研究では、研究代表者らによる近年の研究手法を引き継ぐ形で発展させ、この問題の解消にあたった。具体的には、ある種の数の展開において、非常に大きな空隙を見つけ出し、「桁あがり・桁さがり」の両方をコントロールできるような箇所を探索する計画を立てた。このような箇所の存在が示せれば、数の展開における局所的な振る舞いを知ることができるので、数論的性質についての情報が引き出せる。本研究においては、同テーマで連携研究を行ってきた F.Luca 氏を研究協力者に加え、実際に会って議論を重ねる形で研究を進めた。

第二の研究目的の達成にあたっては、まずテータ関数の特別な場合であるテータ零値

を主軸において研究を進めた。具体的には、テータ零値の間に存在する既知の代数関係式から出発し、どのような集合が関数として代数的に従属になるのか検討した。その後、従属である関数を選び分け、具体的な従属関係式を導出するアルゴリズムを定式化することを試みた。従属性に関する結果は、関係式そのものについても興味深いが、Nesterenko の結果に代表される代数的独立性に関する既存の結果と組み合わせれば、新たな数集合に対する独立性を導くことができる点でも意義がある。非常に大きな係数をもつ従属関係式の導出にあたっては、研究協力者である Carsten Elsner 氏の協力の下、数式処理ソフト Maple を用いて計算を行った。

4. 研究成果

具体的な研究成果は以下の通りである。

(1) ディリクレ指標を係数とする二項回帰数列の逆数和について、無理性、および線形独立性を中心とする数論的性質を証明した。例えば、あるディリクレ指標の無限集合に対して、それらを係数とするフィボナッチ数列の逆数和は有理数体上、線形独立であることがわかった。また、メビウス関数やリュール関数などの乗法的関数に付随する逆数和についても、高次無理性に関する結果が得られ、二項回帰数列の逆数和の数論的性質に関する新たな知見が得られた。

これらの研究成果は国際会議「Czech and Slovak International Conference on Number Theory」、および国内会議「RIMS Workshop 2015 Analytic Number Theory and Related Areas」において発表された(学会発表、)。また本結果をまとめた論文は査読付学術誌に掲載された(雑誌論文)。

(2) 一般約数関数を係数とするランベルト級数の線形独立性を示した(雑誌論文)。これは研究の背景で述べた Erdős の結果の拡張を与えるものである。一般約数関数は、通常の約数個数関数のディリクレ積を繰り返すことにより得られる数論的関数であるが、リーマン・ゼータ関数のべき乗を表現する意味でも重要な関数に位置付けられている。証明は、等差数列上の素数分布に関する Alford, Granville, Pomerance の結果を用いず初等的であり、この点で本研究成果は特徴的であると言える。

(3) 与えられた関数が、有理型関数からなる関数体上で超越的となるための十分条件を与えた。ある種の関数族に対しては、「関数値の超越性」が「関数自身の関数体上の超

越性」に直結する。そのため、超越数論においては、関数自身の超越性や代数的独立性そのものが重要な意味を持ち、また必要となる場面がある。本研究では、漸近的なアプローチを用いて Duffin-Schaeffer(1945)の定理を一般化し、有理整数を係数とするべき級数に関する超越性についての結果を得ることができた。本研究成果は、査読付き学術誌に掲載された(雑誌論文)。

(4) 古典的テータ零値に対して、その間の代数的関係と、その代数関係式を導出するアルゴリズムを得た。テータ関数の超越性、代数的独立性の研究は、Nesterenko (1996) の代数的独立性に関する結果を契機に盛んに研究されてきた。例えば、D. Bertrand (1997) や、D. Duverney-西岡啓二-西岡久美子-塩川宇賢 (1996) らは、Nesterenko の結果を応用し、導関数を含めた種々のテータ関数値の超越性や、ある同一点における値の代数的独立性を示した。その一方、固定されたテータ関数の異なる点における代数的関係性についての結果はあまり知られていなかった。そのため研究代表者は、平成27年度より C. Elsner 氏と共にこの問題に取り組み、平成28年度初期までに代入値に関する一定の条件の下、代数的独立性に関する部分的な結果を得た。当初、主定理において仮定した条件はかなり限定的で不満が残るものであったが、平成28年度にはテータ関数の間の関係式を利用することで、この条件を緩和し一般化することに成功した。

これら一連の研究成果は国際会議「Number Theory Down Under 2016」や「Vilnius Conference in Combinatorics and Number Theory」などにおいて発表され(学会発表、)。本結果をまとめた論文は査読付学術誌に掲載された(雑誌論文)。

本研究期間内に問題提起された他のテータ零値、および関連する保型形式への応用可能性の検討については、今後の課題としたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Carsten Elsner and Yohei Tachiya, Algebraic results for certain values of the Jacobi theta-constant $\theta_3(\tau)$, *Mathematica Scandinavica*, 査読有, 印刷中.

Florian Luca and Yohei Tachiya, Linear independence results for the values of

divisor functions series, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 2014, 2017, 138-150.

Michael Coons and Yohei Tachiya, Transcendence over meromorphic functions, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 査読有, Vol. 95, 2017, 393-399.

Hiromi Ei, Florian Luca, and Yohei Tachiya, Linear independence results for the reciprocal sums of Fibonacci numbers associated with Dirichlet characters, Studia Sci. Math. Hungar, 査読有, Vol. 54, 2017, 61-81.

〔学会発表〕(計 12 件)

立谷 洋平, テータ関数の特殊値の間の代数的関係について, 群大桐生数論セミナー, 群馬大学桐生キャンパス, 2017年12月15日

立谷 洋平, ヤコビ・テータ関数の特殊値について, 北陸数論セミナー, 金沢大学サテライトプラザ, 2017年10月12日

立谷 洋平, テータ関数値の代数的独立性について, 日本数学会2017年度秋季総合分科会, 山形大学小白川キャンパス, 2017年9月11日

Yohei Tachiya, On algebraic relations between the values of the theta function, Vilnius Conference in Combinatorics and Number Theory, Vilnius university, Vilnius, Lithuania, 2017年7月17日

Yohei Tachiya, Algebraic independence results for values of Jacobi theta function, Diophantine Analysis and Related Fields 2017, 日本大学理工学部駿河台キャンパス, 2017年1月9日

Yohei Tachiya, Arithmetical properties for the values of Jacobi theta functions, Number Theory Down Under 2016, Harbourview Function Centre, Newcastle, Australia, 2016年9月24日

立谷 洋平, Arithmetical properties of the values of the Fibonacci L functions, 日本数学会東北支部会, 弘前大学文京キャンパス, 2016年2月13日

立谷 洋平, 乗法的関数に付随する二項回帰数列の逆数和について, 近畿大学数学講演会, 近畿大学東大阪キャンパス, 2015年12月4日

Yohei Tachiya, Linear independence results for various infinite series, RIMS Workshop 2015 Analytic Number Theory and Related Areas, RIMS Kyoto University, 2015年11月6日

Yohei Tachiya, Linear independence results for the reciprocal sums of Fibonacci numbers associated with Dirichlet characters, Number theory seminar, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa, 2015年10月29日

立谷 洋平, ディリクレ指標に付随するフィボナッチ数列の逆数和について, 日本数学会2015年度秋季総合分科会, 京都産業大学, 2015年9月16日

Yohei Tachiya, Linear independence results for reciprocal sums of Fibonacci numbers associated with Dirichlet characters, 22nd Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Hotel Sorea Máj, Liptovský Ján, Slovakia, 2015年9月1日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)
取得状況(計 0 件)

〔その他〕
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

立谷 洋平 (TACHIYA Yohei)
弘前大学・理工学研究科・准教授
研究者番号: 90439539

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

該当なし

(4) 研究協力者

Florian Luca

University of the Witwatersrand
Professor

Michael Coons
University of Newcastle
Senior Lecturer

Carsten Elsner
University of Applied Science FHDW
Professor