

令和元年6月13日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17505

研究課題名(和文)種々の数列のランダム性、およびその超越数論への応用

研究課題名(英文)Randomness of sequences and its applications to transcendental number theory

研究代表者

金子 元 (Kaneko, Hajime)

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：10706724

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、様々な数列の複雑度の未解決問題に挑戦した。まず、代数的数のベータ展開におけるdigitのランダム性の問題に取り組んだ。ベータとして、Pisot数やSalem数を用いた場合、代数的無理数の複雑度に関する先行結果を改良することができた。この手法を超越数論に応用することにより、代数的独立性に関する新しい判定法を構成することに成功した。

さらに、整数のb進展開に関するdigitの複雑度を解析した。Y. Bugeaud氏との国際共同研究で、smooth numberと呼ばれる整数のdigitの複雑度に関する未解決問題を解くことに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数列の複雑度を保証することは、疑似乱数などの応用数学の観点からも重要である。ベータ展開におけるdigitに関して、本研究では加法数論を用いた新たな手法を導入することができた。特に、代数的数のベータ展開に関して、digitの複雑度を保証することができた。代数的数のdigitという情報を研究することで、超越数論、特にベキ級数の超越性特殊値の代数的独立性に関する理論が発展した。また、smooth numberのb進展開のdigitの複雑度を保証できた。本研究の手法により、幅広い整数について、b進展開のdigitを解析できるようになった。

研究成果の概要(英文)：We investigated the complexity of sequences of real numbers and integers. First, we considered the normality of the digits in the beta expansion of algebraic numbers. In the case where beta is a Pisot or Salem number, we succeeded in improving known results of complexity of the digits of algebraic numbers. In particular, we gave new lower bounds for the number of nonzero digits. Moreover, applying our method, we gave new criteria for the algebraic independence of real numbers.

Moreover, we researched the complexity of the digits in the base-b expansions of integers. With Y. Bugeaud, we solved certain open problem on the complexity of the digits in the base-b expansion of smooth numbers.

研究分野：一様分布論

キーワード：数系におけるdigit Pisot数 Salem数 ベータ展開 代数的独立性 Smooth number Newton法 Cauchy数

## 1. 研究開始当初の背景

### (1) 実数の digit に関する複雑度

一様分布論では、数系における digit の分布に関する複雑性、特にランダム性が主な研究対象である。例えば、 $b$  を 2 以上の整数とする。このとき、代数的無理数は  $b$  進展開において正規数(ある種のランダム性を持つ実数)であるという Borel の予想が、典型的な研究課題である。Borel の予想は未解決な問題であるが、疑似乱数など応用数学の観点からも解決が望まれる。D. H. Bailey 氏, J. M. Borwein 氏, R. E. Crandall 氏, C. Pomerance 氏により、実数の  $b$  進展開について、加法数論を用いた革新的な手法が発見された(引用文献 1)。特に、代数的無理数の 2 進展開における複雑度の解析が行われた。しかし、彼らの手法は、研究開始当初、適用できる範囲が限られていた。したがって、この手法を改良し、一般化することが課題であった。特に、ベータ展開と呼ばれる数系において、digit の複雑性を考察することが、必要な研究課題であった。

### (2) 整数の digit に関する複雑度

$b$  は、再び 2 以上の固定された整数であるとする。整数の  $b$  進展開における digit の複雑性に関して、数論において古くから研究されてきた。例えば、2 のべき乗数について、3 進展開における digit を考察する。十分大きい 2 のべき乗数について、digit である 0, 1, 2 が一様に現れることが、数値実験により予想される。ところが、この予想は未解決である。べき乗数の  $b$  進展開に関する複雑性を部分的に保証する定理が C. L. Stewart 氏によって与えられていた(引用文献 2)。しかし、べき乗とは限らない一般の整数に関しては、複雑性について、部分的に保証することも未解決問題であった。

## 2. 研究の目的

### (1) ベータ展開における digit の複雑度

ベータ展開における digit の複雑性を保証することが、本研究の目的である。特に、ベータが Pisot 数および Salem 数と呼ばれる特殊な代数的整数である場合を考察することが、記号力学系の観点からも重要である。まず、研究開始当初の背景で述べた、加法数論の手法をベータ展開に対しても適用可能になるように改良する。また、ベータ展開の digit に関して、得られた結果を超越数論に応用する。特に実数の代数的独立性の理論に応用することを目的とする。

### (2) Smooth number などの digit の複雑度

種々の整数について、 $b$  進展開における複雑性を保証することを目標とする。特に、smooth number と呼ばれる整数の  $b$  進展開を考察する。なお、smooth number は、S-unit と呼ばれる整数を含むため、解析数論において重要な研究対象である。また、先行研究では、digit の複雑度に関する指標として、nonzero digit の個数や sum of digits が用いられてきた。本研究では、より幅広いクラスの指標を用いることで、複雑度に関する先行研究を精密化する。

### (3) 関数体における Cauchy 数の類似

整数論において、有理数体の類似として、正標数の関数体が知られている。Bernoulli 数と呼ばれる有理数は、正標数の関数体において類似が知られていた(Bernoulli-Carlitz 数)。ところが、Bernoulli 数と密接な関連を持つ Cauchy 数については、類似が知られていなかった。Cauchy 数は、組み合わせ論などで重要な役割を果たす。本研究では、Cauchy 数の関数体における類似を考察する。

## 3. 研究の方法

(1) 実数のベータ展開の digit に関して研究を遂行するために、名古屋大学や Strasbourg 大学 (France) など国内外の大学における数学者と情報交換を行った。

また、Vienna 大学 (Austria) や Lorraine 大学 (France) などで行われた研究集会やセミナーに積極的に参加をし、超越数論や一様分布論の研究者と交流を持った。

(2) 整数の digit に関する複雑度を研究した。Smooth number の  $b$  進展開にベイカー理論を応用することにより nonzero digit の漸近的挙動に関する解析を行った。研究遂行のために、Strasbourg 大学を訪問した。そこで、ディオファントス近似の専門家である Y. Bugeaud 氏と研究討議を行った。

また、 $b$  進展開の digit について、nonzero digit 以外の複雑度の指標を考察する。特に、種々の整数列に、有限 word が現れる頻度について解析を行った。研究遂行のために、Lorraine 大学 (France) を訪問した。数系の  $b$  進展開の専門家である T. Stoll 氏とともに研究討議を行った。

(3) Wuhan 大学(中国)の T. Komatsu 氏とともに、正標数の関数体に関する研究討議を行った。Carlitz logarithm function に着目することにより、Cauchy 数の類似を考察した。また、Stirling 数の関数体における類似に対しても考察した。

#### 4 . 研究成果

(1) Pisot 数や Salem 数を用いたベータ展開に関して、複雑度の研究を行った。まず、代数的数のベータ展開に関して、nonzero digit の漸近的挙動を改良することに成功した(雑誌論文 2)。次に、ベータ展開に関して得られた結果を、実数の代数的独立性の理論に応用した(雑誌論文 3,7)。この結果、べき級数の特殊値の代数的独立性について、画期的な判定法を与えることができた。これにより、過去の手法では検証できない実数に対して、代数的独立性を証明することに成功した。

(2) Smooth number の  $b$  進展開における digit に関する成果を述べる。Nonzero digit の個数について、下からの評価式を与えることは未解決問題であった。Y. Bugeaud 氏との国際共同論文において、この未解決問題に一つの解答を与えることに成功した。この研究成果を、論文として出版した(雑誌論文 6,11)。(1)で述べたベータ展開の成果とともに、本研究を日本数学会 2017 年度秋季総合分科会において、特別講演として報告した。

T. Stoll 氏との国際共同研究では、種々の整数列に有限 word が現れる頻度について、下からの評価式を与えることに成功した。先行研究では、特定の限られた有限 word の出現頻度に対してのみ、下からの評価式が与えられていた。本研究では、先行結果を一般の有限 word に対して拡張することに成功した(雑誌論文 4)。特に、本研究により digit の複雑度に関する先行結果を精密化した。

有限 word の出現頻度を考察するために、 $p$  進整数環における Newton 法(Hensel の補題)を拡張する必要が生じた。 $p$  進整数環において、一般の連続関数に対して Hensel の補題が成り立つかどうかは未解決問題であった。T. Stoll 氏との共同研究により、この問題に対して一つの解答を与えることに成功した(雑誌論文 10)。

(3) T. Komatsu 氏とともに、Cauchy 数の関数体における類似を定義した(Cauchy-Carlitz 数)。また、Stirling 数の関数体における類似を定義した(Stirling-Carlitz 数)。これらの定義は、正標数の関数体における整数論、例えば 関数などに応用があると期待される。Cauchy-Carlitz 数と Bernoulli-Carlitz 数などの間に成立する関係式について、Hasse-Teichmüller 微分を用いて、求めることに成功した(雑誌論文 1,5)。さらに、Stirling-Carlitz 数について、直交関係式と呼ばれる、基本的な関係式が成り立つことを証明した。

#### < 引用文献 >

1. D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall and C. Pomerance, On the binary expansions of algebraic numbers, J. Theor. Nombres Bordeaux vol. 16 (2004), 487-518.
2. C. L. Stewart, On the representation of an integer in two different bases, J. Reine Angew. Math. vol. 319 (1980), 63-72.

#### 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 11件)

1. [Hajime Kaneko](#), Thomas Stoll, Hensel 's lemma for general continuous functions to appear in Indagationes Mathematicae, 査読有, 印刷中, DOI:10.1016/j.indag.2019.02.004.
2. Yann Bugeaud and [Hajime Kaneko](#), On Perfect Powers in Linear Recurrence Sequences of Integers, to appear in Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, 印刷中.
3. [Hajime Kaneko](#), Arithmetical properties of real numbers related to beta-expansions, to appear in Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici, 査読有, 印刷中 DOI:10.7169/facm/1714.
4. Shigeki Akiyama, Jonathan Caalim, Katsunobu Imai, and [Hajime Kaneko](#), Corona Limits of Tilings: Periodic Case, Discrete & Computational Geometry, vol.61 (2019), p.626-652, 査読有, DOI:10.1007/s00454-018-0033-x.
5. Yann Bugeaud and [Hajime Kaneko](#), On the digits in the base- $b$  expansion of smooth numbers, RIMS Kokyuroku, vol. 2092 (2018), p. 97-103, 査読無.
6. Yann Bugeaud and [Hajime Kaneko](#), On the digital representation of smooth numbers, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol.165 (2018), p.533-540, 査読有, DOI:10.1017/S0305004117000640.

7. [Hajime Kaneko](#) and Takao Komatsu, Bernoulli-Carlitz and Cauchy-Carlitz numbers with Stirling-Carlitz numbers, RIMS Kokyuroku Bessatsu B72 (2018), p.23-35, 査読有.
8. [Hajime Kaneko](#) and Thomas Stoll, On subwords in the base- $q$  expansion of polynomial and exponential functions, Integers 18A (2018), Article A11, 査読有.
9. [Hajime Kaneko](#), Algebraic independence of the values of power series with unbounded coefficients, Arkiv for Matematik, vol.55 (2017), p.61-87, 査読有, DOI:10.4310/ARKIV.2017.v55.n1.a3.
10. [Hajime Kaneko](#), On the number of nonzero digits in the beta-expansions of algebraic numbers, Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova, vol.136 (2016), p.205-223, 査読有, DOI:10.4171/RSMUP/136-14.
11. [Hajime Kaneko](#) and Takao Komatsu, Cauchy-Carlitz numbers, Journal of number theory, vol. 163 (2016), p.238-254, 査読有, DOI:10.1016/j.jnt.2015.11.019.

〔学会発表〕(計 21 件)

1. [Hajime Kaneko](#), Comparison of normality between different numerical systems, 日本数学会 2019 年度年会, 東京工業大学, 2019 年.
2. [Hajime Kaneko](#), Analogy with the Lagrange spectrum for geometric sequences, Keio Dynamics Day 2019, 慶應義塾大学, 2019 年.
3. [Hajime Kaneko](#), Analogy of the Lagrange spectrum for powers of quadratic Pisot units, Diophantine Analysis and Related Fields 2019 (国際学会), 筑波大学, 2019 年.
4. [Hajime Kaneko](#), Uniform distribution theory related to beta expansion and geometric sequences, 第 12 回ゼータ若手研究集会, 名古屋大学, 2019 年.
5. [Hajime Kaneko](#), Comparison of generic points of measure preserving systems, 数論とエルゴード理論, 金沢大学, 2019 年.
6. [Hajime Kaneko](#), On the transcendence of power series at algebraic integer points, 解析的整数論とその周辺 (国際学会), 京都大学, 2018 年.
7. [Hajime Kaneko](#), ベキ級数に代数的整数を代入した値の超越性, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会, 岡山大学, 2018 年.
8. [Hajime Kaneko](#), Diophantine approximation and base- $b$  expansion of smooth numbers, Diophantine Approximation and Transcendence (国際学会), CIRM, Marseille, (France), 2018.
9. [Hajime Kaneko](#), 非負整数係数ベキ級数の代数的整数点における超越性, 慶應 超越数論セミナー, 慶應義塾大学, 2018 年.
10. [Hajime Kaneko](#),  $b$  進展開に関する Borel の予想および超越数論への応用, 慶應 超越数論セミナー, 慶應義塾大学, 2018 年.
11. [Hajime Kaneko](#), 代数的数のベータ展開における digit 変化数について, 日本数学会 2018 年度年会, 東京大学, 2018 年.
12. [Hajime Kaneko](#), On the digital expansion of algebraic numbers, Diophantine Analysis and Related Fields 2018 (国際学会), 慶應義塾大学, 2018 年.
13. [Hajime Kaneko](#), 代数的数の digit 展開に関する最近の展望, Workshop「数論とエルゴード理論」, 金沢大学, 2018 年.
14. [Hajime Kaneko](#), On the digits in the base- $b$  expansion of smooth numbers, Analytic Number Theory and Related Areas(国際会議), 京都大学, 2017 年.
15. [Hajime Kaneko](#), 整数及び小数の digit 展開における一様分布論の最近の展開, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会(特別講演), 山形大学, 2017 年.
16. [Hajime Kaneko](#), On the number of nonzero digits of smooth numbers, Journees Arithmetiques (国際学会), Caen Normandy 大学 (France), 2017 年.
17. [Hajime Kaneko](#), Algebraic independence of the values of power series with unbounded coefficients, Journee d'Approximation Diophantienne, Lorraine 大学 (France), 2016 年.
18. [Hajime Kaneko](#), Algebraic independence of real numbers related to beta expansion and beta representation, Normal Numbers: Arithmetic, Computational and Probabilistic Aspects (国際会議), Vienna 大学 (Austria), 2016 年.
19. [Hajime Kaneko](#), Algebraic independence of real numbers related to beta expansion, Workshop「数論とエルゴード理論」, 金沢大学, 2016 年.
20. [Hajime Kaneko](#), 有界な非負整数を係数にもつベキ級数の値の数論的性質(Arithmetical properties of the values of power series), 解析的整数論とその周辺(Analytic Number Theory and Related Areas, 国際会議), 京都大学, 2015 年.
21. [Hajime Kaneko](#), Arithmetical properties of power series related to  $\beta$ -expansion, 29th Journees Arithmetiques (国際会議), Debrecen 大学 (Hungary), 2015 年.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

取得状況（計 0 件）

## 6 . 研究組織

- (1) 研究分担者：該当なし
- (2) 研究協力者：該当なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。