

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 15 日現在

機関番号：13801

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2023

課題番号：15K17507

研究課題名（和文）単項式イデアルや二項式イデアルの極小自由分解及びその不変量

研究課題名（英文）A minimal free resolution and its invariants of a monomial ideal or a binomial ideal

研究代表者

木村 杏子 (Kimura, Kyouko)

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：60572633

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題の目標の一つは単項式イデアルの新しい具体的な自由分解の構成であった。得られた成果として、あるグラフのカバーイデアルの極小自由分解の構成（寺井直樹氏、Siamak Yassemi氏との共同研究）、極小自由分解の形と関係する extremal ベッチ数の個数と極小自由分解に付随する不変量である regularity との間に相関関係がないこと（日比孝之氏、松田一徳氏との共同研究）が挙げられる。

また二項式イデアルに関するエッジ環の研究も行い、それが Serre の (S₂) 条件を満たすための必要条件を与えた（東谷章弘氏との共同研究）。

研究成果の学術的意義や社会的意義

極小自由分解は可換環論における基本的かつ重要な概念の一つであるが、一般にそれを具体的に構成することは、体上の多項式環の単項式イデアルに限っても難しい。そこで、極小自由分解の形を知ることやそれに付随する不変量を知ることが重要になってくる。特に、グラフに付随するイデアルを考えた場合、グラフの組合せ論でそれを記述することが興味深い問題となる。本研究課題で得られた成果は、ある種のグラフのカバーイデアルに対して具体的な極小自由分解を与えたことをはじめとして、上記の問題に対する解答の一部を与えたことになるという学術的意義をもつ。

研究成果の概要（英文）：One of the aim of the project is to construct a new concrete free resolution for a monomial ideal. As a results of our study, we constructed a free resolution of the cover ideal of a graph with some conditions (joint work with Naoki Terai and Siamak Yassemi). Also we studied extremal Betti numbers from which we can know the rough form of a minimal free resolution, and we concluded that there is no relation between the number of extremal Betti numbers and the regularity which is an invariant associated with a minimal free resolution (joint work with Takayuki Hibi and Kazunori Matsuda).

Moreover, we studied the edge ring which relates to a binomial ideal. We provided a necessary condition with which the edge ring satisfies Serre's condition (S₂) (joint work with Akihiro Higashitani).

研究分野：組合せ論的可換環論

キーワード：エッジイデアル エッジ環 Cameron-Walker グラフ very well-covered グラフ extremal ベッチ数 regularity 射影次元 Cohen-Macaulay 性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

ネーター局所環の有限生成加群に対し、極小自由分解の存在が知られている。特に、体上の n 変数多項式環の有限生成加群に対しては、極小自由分解の長さが n 以下であることが知られている (Hilbert のシヂジー定理)。また、極小自由分解は同型を除いて一意的に定まり、その長さは射影次元、各成分のランクはベッチ数と呼ばれる。極小自由分解を具体的に構成することは、可換環論における基本的かつ重要な問題である。多項式環の単項式イデアルを対象を絞ると、Taylor resolution、Lyubeznik resolution、hull resolution など、様々な具体的な自由分解が知られているが、一般には極小ではない。一般の単項式イデアルに対して、その極小自由分解を構成することが研究代表者の一つの大きな目標である。

また、研究代表者はこれまでスクエアフリーな単項式イデアルの算術階数を研究してきた。イデアルの算術階数とは、それを up to radical に生成する元の個数の最小値と定義される。これは、代数的集合を超曲面の共通部分として表すときに必要な超曲面の個数の最小値であり、代数幾何における古典的な研究対象である。一般に算術階数を決定すること、さらにその(最小個数の) up to radical な生成元を見つけることは困難である。スクエアフリーな単項式イデアルに限れば、その算術階数は射影次元を下限にもつ (Lyubeznik)。一方、研究代表者は Lyubeznik resolution の長さが算術階数の上限を与えることを証明した。この結果は、Kummini & Walther により、Lyubeznik resolution を一般化した自由分解の長さに拡張された。射影次元は極小自由分解の長さであることを踏まえ、このことから算術階数と自由分解の関係性が期待される。

単項式イデアルに対しては、Taylor resolution という具体的な自由分解がある。Taylor resolution は極小とは程遠いが、それから派生してより極小に近い具体的な自由分解が構成されてきた。そこで、単項式イデアルを二項式イデアルに置き換えて、Taylor resolution と同様の自由分解を構成できないか、という問題提起ができる。この問題の解答が得られれば、二項式イデアルの自由分解の研究が単項式イデアルのそれと同様の手法でできるようになることが期待される。二項式イデアルが出てくる典型的なものとして、エッジ環が挙げられる。エッジ環はグラフに付随する半群環であり、その研究については大杉・日比によるおびただしい先行結果がある。特に大杉・日比はエッジ環の正規性のグラフの言葉による特徴づけを与えた。Hochstar の結果から、一般に半群環は正規ならば Cohen—Macaulay である。Trung & Hoa は、一般の半群環に対してその Cohen—Macaulay 性の特徴づけを与えたが、エッジ環の Cohen—Macaulay 性のグラフの言葉による特徴づけはなされていない。このような解釈を与えることは、組合せ論的意味付けを与えるという視点から重要である。

2. 研究の目的

本研究課題の目標は、単項式イデアルや二項式イデアルの新しい具体的な自由分解の構成であった。また、Batzies & Welker は Taylor resolution からより極小に近い自由分解を構成することに成功したが、それと同様に、具体的な自由分解を極小に近づける方法を見つけることも目指した。

ベッチ数が分かれば極小自由分解の形が分かるため、ベッチ数の特徴づけは重要である。研究代表者は、これまでエッジイデアルとよばれるグラフに付随するイデアルのベッチ数の研究を行ってきた。エッジイデアルに関する研究は、エッジイデアルの環論的性質をもととのグラフの言葉で記述するというもので、環論的性質と組合せ論的性質を結びつけるという点で興味深い。そこでエッジイデアルのベッチ数の特徴づけを本研究課題の第一の目標とした。

また、単項式イデアルの具体的な自由分解と算術階数の関係の解明、特に、自由分解から up to radical な生成元を構成することを本研究課題の第二の目標とした。

そして、エッジ環の Cohen—Macaulay 性のグラフの言葉による特徴づけを第三の目標とした。

3. 研究の方法

本研究課題の目標達成のために、次の方針をとる予定であった：

- (1) 具体的な自由分解から up to radical な生成元の構成を試みる。
- (2) 典型的なエッジイデアルについて、その環論的性質を調べる。
- (3) エッジイデアルのベッチ数の特徴づけ。
- (4) エッジ環の環論的性質の研究。
- (5) 二項式イデアルについて知識を深める。

(1) に関して、具体的には、Batzies & Welker による、Lyubeznik resolution を拡張した自由分解について、それから up to radical な生成元を構成することを試みた。また、関連する問題として、stacked polytope のスタンレー・ライスナイデアルの算術階数の決定を寺井直樹氏と共同で試みた。

(2) に関して、典型的なエッジイデアルとして注目したものが、Cameron—Walker グラフと very

well-covered グラフである。一般にエッジイデアルの regularity は誘導マッチング数とマッチング数で挟まれるが、Cameron-Walker グラフはその両者が一致するものであるため、組合せ論的にも興味深いものである。Cameron-Walker グラフのエッジイデアルの不変量に関する研究は、主に日比孝之氏、松田一徳氏、Adam Van Tuyl 氏との共同研究で行った。特に、令和元年5月には京都大学数理解析研究所に集まり直接議論することができた。一方、very well-covered グラフについては、そのエッジイデアルの構造に関する研究を、Mohammad Reza Pournaki 氏、Siamak Yassemi 氏、寺井直樹氏と共同で行った。また、さらに Seyed Amin Seyed Fakhari 氏を含めたメンバーで very well-covered グラフのエッジイデアルについて知られている結果をまとめたサーベイ論文を執筆した。

(3)に関しては、まず研究代表者による完全二部部分グラフによるベッチ数の非消滅性の十分条件を用いて得られた結果の拡張を、寺井直樹氏と Siamak Yassemi 氏と共同で行った。

ベッチ数を計算するための手法として Betti splitting という概念が Ha や Van Tuyl らにより開拓されてきた。この概念をエッジイデアルの射影次元や regularity、ベッチ数の特徴づけに適用できないかと研究を開始し、考察結果を平成 27 年年 8 月に大阪で開催されてセミナーにて発表し、各専門家の意見を求めた。

また、2018 年からは視点を少し変えて自由分解の形に関する研究を、主に日比孝之氏、松田一徳氏と共同で行った。具体的には extremal ベッチ数という、ベッチ数の‘かど’にあたる部分に注目してそれに関する研究を行った。

(4)に関しては、エッジ環の Cohen-Macaulay 性のグラフの言葉での特徴づけを目標にした。東谷章弘氏との共同研究の形で行い、東谷章弘氏に何度か静岡大学に来ていただき議論を重ねた。

(5)に関して、2019 年 9 月に「組合せ論的可換代数オースタムセミナー」と題して勉強会の色濃い研究集会を開催した。柳川浩二氏に squarefree 加群とその応用について、大杉英史氏にトーリックイデアルと代数統計について、宮崎充弘氏に Hibi 環について入門的な講義をお願いし、そのほか 4 名の専門家に最近の研究成果についての講演をお願いした。また、2023 年 12 月には「組合せ論的可換代数ウインターセミナー」を開催した。こちらは大学院の学生を主な講演者とする研究集会で、研究代表者自身が最近の研究の動向を知る機会となっただけでなく、組合せ論的可換環論を研究する若手同士の交流の場ともなった。

4. 研究成果

研究方法(1)に関しては、あまりうまくいかず、まとまった成果は得られなかった。寺井直樹氏と共同で行った stacked polytope のスタンレー・ライスナーイデアルの算術階数の決定に関して、このイデアルのベッチ数は寺井・日比により既知であり、極小自由分解もある程度知られているものである。このイデアルの生成元は帰納的に与えられており、それを利用した up to radical な生成元の構成を試みたが、こちらも成功には至らなかった。

(2)に関して、エッジイデアルの剰余環の regularity と \mathbb{k} -多項式の次数に注目し、グラフの頂点数を固定した際のこれらの不変量の取りうるペアについての研究を行った結果、それらのペアの集合を整凸多面体で挟むことができた。特に、Cameron-Walker グラフについては、完全な特徴づけを与えることに成功した。この研究は日比孝之氏、松田一徳氏、Adam Van Tuyl 氏と共同で行った。さらに菅野裕樹氏を加えて、depth と Krull 次元のペアについて同様の研究を行ったところ、同様の結果を得た。特に、Cameron-Walker グラフに関しては、グラフの頂点数を固定した際の depth、Krull 次元、regularity、 \mathbb{k} -多項式の次数の取りうる列全体の集合を決定することに成功した。これらの結果は、一般のエッジイデアルの性質を知る手掛かりとなるものである。特に、Cameron-Walker グラフについては、そのグラフの新たな性質が判明したという点で意義深い。これらの結果は論文として取りまとめ、出版された。また、これらの一連の共同研究の結果を「エッジイデアルの不変量」と題して 2019 年に代数学シンポジウムで発表した(コロナ禍のため、web に資料を掲載するのみとなった)。

一方、very well-covered グラフのエッジイデアルの構造に関する研究を、Mohammad Reza Pournaki 氏、Siamak Yassemi 氏、寺井直樹氏と共同で行った結果、任意の very well-covered グラフがある Cohen-Macaulay very well-covered グラフの派生物として記述できることが分かった。これにより、任意の very well-covered グラフのエッジイデアルの regularity 等を対応する Cohen-Macaulay very well-covered グラフの言葉で記述することもできた。これまでにいくつか似たような先行結果はあるが、また別の表現を与えたことになる。この結果により、very well-covered グラフを議論するうえで、本質的に Cohen-Macaulay 性を仮定できることになったため、このグラフの性質がより解明されていくことが期待される。この結果も論文として取りまとめ、出版された。

(3)に関して、寺井直樹氏と Siamak Yassemi 氏との共同研究により、very well-covered グラフの射影次元の特徴づけや Cohen-Macaulay very well-covered グラフのカバーイデアルの極小自由分解の構成に成功した。具体的な単項式イデアルの極小自由分解の例を与えたことで、これをもとに他の単項式イデアルの極小自由分解も具体的に構成されていくことが期待される。この結果も論文として取りまとめ、出版された。また、2015 年 7 月に大阪で開催された国際研究集会や、2018 年 3 月にアメリカのオハイオ州立大学で開催された AMS Sectional Meeting、2021 年 6 月の東京可換環論セミナー等にて講演し、周知を図った。

また、日比孝之氏、松田一徳氏との共同研究で、regularity、射影次元、extremal ベッチ数の

個数の取りうる値に関する研究を行い、regularity と extremal ベッチ数の個数は任意の値を取りうるということが分かった。それから、土谷昭善氏を含めた共同研究により、Cameron-Walker グラフについて、それが唯一の extremal ベッチ数をももの特徴づけに成功した。これらは extremal ベッチ数に関する研究の第一段階であり、この研究を継続することで、極小自由分解の形がより鮮明になっていくことが期待される。これらの結果は論文として取りまとめ、出版された。また、前者の結果については日本数学会 2019 年度年会や 2019 年 6 月の第 32 回可換環論セミナー等で講演し、周知を図った。

(4)に関して、東谷章弘氏との共同研究で、Cohen-Macaulay 性より弱い Serre の (S_2) 条件について、エッジ環がそれを満たすための必要条件を与えた。この結果をもとに、グラフの言葉による Cohen-Macaulay 性の特徴づけの研究が発展していくことが期待される。この結果は論文としてまとめ、国際会議のプロシーディングスに掲載した。なお、一般にエッジ環についてそれが正規であることと Serre の条件 (R_1) と (S_2) を満たすことは同値で、 (R_1) の方は Hibi&Kattahän により特徴づけられている。

そのほか、辺に重みをつけたイデアルのエッジイデアルの研究を柴田孝祐氏、寺井直樹氏と共同で行った。この結果については、現在論文を執筆中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 6件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kyouko Kimura, Mohammad Reza Pournaki, Naoki Terai, Siamak Yassemi	4. 巻 606
2. 論文標題 Very well-covered graphs and local cohomology of their residue rings by the edge deals	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 1--18
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2022.04.021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Takayuki Hibi, Kyouko Kimura, Kazunori Matsuda, Adam Van Tuyl	4. 巻 2
2. 論文標題 The regularity and h -polynomial of Cameron--Walker graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Enumerative Combinatorics and Applications	6. 最初と最後の頁 #S2R17, 12pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.54550/ECA2022V2S3R17	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kyouko Kimura, Mohammad Reza Pournaki, Seyed Amin Seyed Fakhari, Naoki Terai, Siamak Yassemi	4. 巻 9
2. 論文標題 A glimpse to most of the old and new results on very well-covered graphs from the viewpoint of commutative algebra	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Research in the Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 No. 29, 18pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40687-022-00326-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Takayuki Hibi, Kyouko Kimura, Kazunori Matsuda, Akiyoshi Tsuchiya	4. 巻 584
2. 論文標題 Regularity and s -invariant of Cameron--Walker graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 215--242
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2021.05.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takayuki Hibi, Hiroju Kanno, Kyouko Kimura, Kazunori Matsuda, Adam Van Tuyl	4. 巻 374
2. 論文標題 Homological invariants of Cameron--Walker graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 6559--6582
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/8416	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akihiro Higashitani, Kyouko Kimura	4. 巻 77
2. 論文標題 A necessary condition for an edge ring to satisfy Serre's condition (S_2)	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 121-128
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/07710121	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takayuki Hibi, Kyouko Kimura, Kazunori Matsuda	4. 巻 113
2. 論文標題 Extremal Betti numbers of edge ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Archiv der Mathematik	6. 最初と最後の頁 149--155
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00013-019-01322-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Le Tuan Hoa, Kyouko Kimura, Naoki Terai, Tran Nam Trung	4. 巻 473
2. 論文標題 Stability of depths of symbolic powers of Stanley--Reisner ideals	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 307--323
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2016.10.036	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kyouko Kimura, Naoki Terai, Siamak Yassemi	4. 巻 230
2. 論文標題 The projective dimension of the edge ideal of a very well-covered graph	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 160--179
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2017.7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 木村杏子
2. 発表標題 Very well-covered グラフのエッジイデアルの射影次元
3. 学会等名 東京可換環論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 木村杏子
2. 発表標題 エッジイデアルの不変量
3. 学会等名 第65回代数シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 木村杏子
2. 発表標題 エッジイデアルのextremalベッチ数
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 木村杏子
2. 発表標題 与えられた個数のextremalベッチ数をもつエッジイデアルについて
3. 学会等名 第32回可換環論セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kyouko Kimura
2. 発表標題 On non-vanishing theorem for Betti numbers of edge ideals
3. 学会等名 AMS Sectional Meeting --- Special Session on Homological Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kyouko Kimura
2. 発表標題 A minimal free resolution of the cover ideal of a very well-covered graph
3. 学会等名 The 8th Mathematical Society of Japan Seasonal Institute, Current Trends on Groebner Bases (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 木村杏子
2. 発表標題 Very well-covered graph について
3. 学会等名 グレブナー若手集会
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Kyouko Kimura
2. 発表標題 On the Betti splittings of edge ideals
3. 学会等名 Mini seminar on Combinatorics and Commutative Algebra
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イラン	Sharif University of Technology	University of Tehran		
カナダ	McMaster University			
Vietnam	Institute of Mathematics			