様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１２６０４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ１７５１６

研究課題名（和文）傾変異理論と導来同値の研究

研究課題名（英文）Studies of tilting mutation theory and derived equivalences

研究代表者
相原　琢磨（AIHARA, Takuma）

東京学芸大学・教育学部・講師

研究者番号：４０７１４１５０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、傾変異理論および導来同値を用いて導来圏の構造を解析することである。特に、与えられた多元環の傾離散性を考察し、傾離散性を満たすための有用な同値条件を確立した。それを用いて次の研究成果を得た：（１）ディンキン型前射影多元環は傾離散性を満たす。（２）ブラウアーグラフ多元環が傾離散性を満たすための必要十分条件は、そのブラウアーグラフが奇数型であることである。
さらに、準傾離散性を満たすならば前準傾対象のボンガルツ完備化が可能であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
傾変異理論は最近になって導入された理論であり、近年非常に注目を浴びている。また、傾離散性を満たす多元環もほとんど知られていなかった。本研究によって、傾離散性を満たすための必要十分条件を与えたことはとても意義がある。それは特に、数学的帰納法による手法を与えており、様々な状況下で利用できるため有用である。それを用いて、実際に傾離散性を満たす多元環のクラスを発見したことは価値があるといえる。今後も、この手法を用いることで傾離散性を満たす多元環の発見が期待される。
また、もともとは古典的な問題であったボンガルツ完備化問題に対しても、一般の傾理論に拡張してある十分条件を与えられたことは意義深い。

研究成果の概要（英文）：The structure of the derived category over a finite dimensional algebra was investigated from the viewpoint of tilting mutation theory and derived equivalences. In particular, the tilting-discreteness of a given algebra was studied, and a powerful method of showing the tilting-discreteness was given. This leads to the following results: (1) any preprojective algebra of Dynkin type is tilting-discrete. (2) a Brauer graph algebra is tilting-discrete if and only if the Brauer graph has at most one odd-cycle and none of even-cycle.
Moreover, it was proved that the Bongartz completion for presilting objects is possible in a silting-discrete triangulated category.

研究分野：多元環の表現論

キーワード：傾理論　傾対象　傾変異　傾連結　傾離散　ボンガルツ完備化　導来圏　導来同値

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

研究代表者の専門分野は多元環の表現論である。この分野の主題は、多元環上の（有限生成）加群全体のなす圏、すなわち、加群圏の構造を解析することにある。さらに近年では、ホモロジー的手法が導入され、加群圏のホモロジカルな情報をすべてもっている導来圏の構造解析が重要になっている。研究代表者はこの問題に対して、構造の等しい導来圏（導来同値）についての理論である「傾理論」を用いて研究を行っている。傾理論では傾対象が中心的役割をもつため、より多くの傾対象を得たい。そこで導入された方法が、傾変異である。これを用いれば、（一つでも傾対象が見つかれば）無限に多くの傾対象を作ることができる。この傾変異を駆使することで、導来圏の構造を考察してきた。（ここで簡単にするため、正確には準傾理論・準傾対象・準傾変異とすべきところを、傾理論・傾対象・傾変異として話を進める。）

（１）“長さ２”の傾対象の分類

傾対象は“長さ”をもっている。最も短い“長さ１”の傾対象は多元環そのものである。次に考えるべきは“長さ２”の傾対象であり、与えられた多元環上の“長さ２”の傾対象を分類することが求められる。また、“長さ２”の傾対象は台τ傾加群と１対１に対応することが知られており、その全容を解明することが求められている。

（２）傾連結性および傾離散性の検証

上で述べたように、傾変異を繰り返すことにより、一つでも傾対象を見つけることができれば無限に多くの傾対象を作ることができる。一方、「傾変異の繰り返しですべての傾対象を得ることができるか」という問いは自然である；これを【傾連結性問題】とよぶ。残念ながら、一般の多元環は傾連結性を満たさない。つまり一般には、（一つでも傾対象があれば）傾変異では得られないほど多くの傾対象が存在することがわかっている。では、どのような多元環が傾連結性を満たすかが次の問題である。

さらに、各“長さ”の傾対象がそれぞれ有限個しかないような多元環を、傾離散であるという。一般に、傾離散性を満たすならば傾連結性を満たすことが知られている。そこで特に、傾離散性を満たす多元環を見つけることが課題である。

（３）ボンガルツ完備化の傾対象への拡張

本研究では傾対象が重要な役割を果たすことは述べてきたが、一方、傾対象であるための条件のうちの一部分が満たされている場合（そのような対象を前傾対象とよぶ）、それを含むように傾対象を構成できるかどうかはわかっていない。古典的には、加群圏における傾理論で中心的役割を果たす傾加群のときに同様の問題が考えられ、ボンガルツによって肯定的に解決されている；これを前傾加群のボンガルツ完備化という。これを傾対象に拡張しようというのが、次の問題である。（正確には、一般に傾対象ではうまくいかないことがわかっており、ボンガルツ完備化を成功させるためには準傾対象を用いることが正しい設定であると考えられる。つまり、前準傾対象のボンガルツ完備化は可能であると予想される。）

（４）傾対象の半順序構造からの多元環の復元

与えられた多元環上の傾対象全体の集合には、半順序構造が入る。特に、“長さ２”の傾対象に制限した半順序集合を「２傾ポセット（poset）」とよぼう。このような２傾ポセットの構造はもちろん与えられた多元環によって異なるが、逆に、適当な半順序集合が与えられたとき、それと構造が等しい２傾ポセットをもつ多元環を構成できるかというのは自明ではない。古典的には、ハッペルとウンガーによって興味深い結果が示されており、この結果の拡張をすることが問題である。

（５）その他

① 傾対象の存在・非存在

上で幾度か「傾対象が存在すれば」と述べてきたが、本研究を進める過程において「傾対象が存在しない三角圏は何か」という問いが生まれた。もちろん傾対象が存在しない三角圏は多くあるが、多元環に付随する三角圏（たとえば、導来圏、安定圏、特異圏など）においてどのようなときに傾対象が存在しないかを解明することが求められる。

② 三角圏の次元

与えられた多元環と導来同値な多元環を考える上で、導来圏における不変量が一つの役割を果たす。つまり、構造が等しい導来圏を探すときはまず、ある数値（導来不変量）を計算することでその正否を判断することができる。一つの重要な導来不変量として導来圏の次元（より一般に、三角圏の次元）が挙げられる。この三角圏の次元から三角圏の構造を把握することが求められている。

２．研究の目的

「１．研究開始当初の背景」で述べた問題を解決することが本研究の目的である。

まず、以下のような多元環において、「１．研究開始当初の背景（１）および（２）」で挙げた問題を考察する。

（１）ディンキン型前射影多元環

ディンキン型前射影多元環における傾理論は、ある群（ワイル群）と密接な関係をもつ。特に、水野有哉氏によってディンキン型前射影多元環の台τ傾加群（つまり“長さ２”の傾対象）

はワイル群を用いて完全に分類された。そこで、一般の傾対象について観察することが次の目標である。また、ディンキン型前射影多元環の傾連結性および傾離散性について解明することを目指す。

（２）ブラウアーグラフ多元環

ブラウアーグラフ多元環はグラフから定義される多元環であり、とても良い組み合わせ的特徴をもつ。そのため、傾理論とその組み合わせ的特徴の間には重要な関係が存在することが期待できる。そこで、ブラウアーグラフ多元環における傾理論を、組み合わせ的手法を用いて解明することが目標である。特に、ブラウアーグラフ多元環上の“長さ２”の傾対象の分類および傾離散性を満たすための必要十分条件を与えることが目的である。

また、研究代表者の先行研究において、「１．研究開始当初の背景（２）」で挙げた傾離散性を確認するための一つの手法を確立したが、そこでは的確に定式化するには至らなかった。そこで、傾離散性を満たすための有用な同値条件を与えることが目的である。

同先行研究においては、前傾対象のボンガルツ完備化（「１．研究開始当初の背景（３）」）についても部分的解決を得たが、それでは不十分なためさらに考察を続けた。特に、前傾対象の完備化が可能であるための十分条件を与えることが目的である。

「１．研究開始当初の背景（４）」で挙げた問題について、解決を試みる。特に、ツリークイバー多元環と等しい２傾ポセットをもつ多元環を考察した。ツリークイバー多元環はある意味で単純な構造をもつため、その２傾ポセット構造も特徴的な形をしている。では、その２傾ポセットと等しい２傾ポセットをもつ多元環はどのくらい存在するかという問題の解決を目指す。

３．研究の方法

上記の多元環を実際に与え、傾変異を行うなど非常に多くの例を計算することで定式化することを目指した。また、先行研究を精査し重要な性質をもう一度見直した。一方、準傾変異理論は新しい理論であるため先行研究が少ないが、準傾変異や準傾連結性、準傾離散性を導入した論文を読み込むことで使える手法を再確認した。

さらに、水野有哉氏、足立崇英氏、アーロン・チャン氏、加瀬遼一氏と議論することでそれぞれの問題を解決することができた。また、伊山修氏に非常に有用なご助言をいただき、成果に繋がった。

４．研究成果

以下で得られた研究成果について述べる。なお、（１）～（５）の番号は「１．研究開始当初の背景」に準じる。

（１）足立崇英氏およびアーロン・チャン氏との共同研究により、ブラウアーグラフ多元環上の“長さ２”の傾対象を、ブラウアーグラフの組み合わせ的情報により完全に決定することに成功した。

（２）① 水野有哉氏との共同研究により、準傾離散性を満たすための有用な同値条件を与えることができた。同研究ではさらに、ディンキン型前射影多元環上の傾対象を、ブレイド群を用いることにより完全に記述した。また、傾離散性を満たすための同値条件を適用することで、ディンキン型前射影多元環が傾離散性を満たすことを示した。

② （１）における共同研究において、“長さ２”の傾対象の分類および（２）①の傾離散性を満たすための同値条件を用いることで、ブラウアーグラフ多元環が傾離散性を満たすための必要十分条件を、ブラウアーグラフの組み合わせ的情報により与えることができた。具体的には、ブラウアーグラフ多元環が傾離散性を満たすこととそのブラウアーグラフが奇数型であることが同値であることを示した。

（３）① （２）①における共同研究において、準傾離散性を満たすならば前準傾対象のボンガルツ完備化が可能であることを証明した。

② （１）の共同研究において、（２）②および（３）①の結果を組み合わせることによって、奇数型ブラウアーグラフ多元環において、前傾対象のボンガルツ完備化が可能であることがわかった。

上記研究成果（準傾離散性を満たすための同値条件、傾離散性を満たす２つの多元環のクラスの発見、ボンガルツ完備化可能性問題に対する十分条件）により、傾変異理論を大きく発展させることができた。

（４）加瀬遼一氏との共同研究により、ツリークイバー多元環と等しい２傾ポセットをもつ多元環を完全に決定することに成功した。これは、古典的な傾理論におけるハッペル・ウンガーの定理の拡張であり、今回の結果を発端に同問題のさらなる解決が期待される。

（５）① 右自己入射次元有限な多元環の特異圏には準傾対象が存在しないことを示した。特に、岩永・ゴーレンシュタイン多元環上の安定 CM 圏（加群圏の充満部分圏の安定圏であり、今の場

合、特異圏と圏同値）には準傾対象が存在しないことがわかる。一般に、多元環上の特異圏には準傾対象が存在しないことを予想とし、この研究は現在進行中である。
② 上で述べた三角圏の次元がゼロのとき、その三角圏は“小さい”といえる。“小さい”三角圏の別の概念として、局所有限性（局所的に見ると対象が有限個となる性質）が挙げられる。これらはどちらも“小さい”三角圏であり、これらの概念にはある包含関係が存在すると期待できる。高橋亮氏との共同研究により、次元ゼロをもつ三角圏と局所有限な三角圏を比較し、片方の性質からもう一方の性質を導くための条件を与えた。さらに、孤立特異点をもつ完備局所環上の岩永・ゴーレンシュタイン多元環における安定 CM 圏が局所有限であることと有限 CM 表現型が同値であることを証明した。また、同研究では、三角圏の次元の下からの評価についてその方法を与えた。応用として、余傾加群を用いた次元に関する吉脇の結果を回復した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計５件）

1. Takuma Aihara and Ryo Takahashi, Remarks on dimensions of triangulated categories. J. Algebra 521 (2019), pp. 235—246. （DOI: 10.1016/j.algebra.2018.12.001）（査読有り）
2. Takuma Aihara and Ryoichi Kase, Algebras sharing the same support τ-tilting poset with tree quiver algebras. Q. J. Math. 69 (2018), no. 4, pp. 1303—1325. （DOI: 10.1093/qmath/hay025）（査読有り）
3. Takahide Adachi, Takuma Aihara and Aaron Chan, Classification of two-term tilting complexes over Brauer graph algebras. Math. Z. 290 (2018), no. 1—2, pp. 1—36.（DOI: 10.1007/s00209-017-2006-9）（査読有り）
4. Takuma Aihara, Singularity categories and silting objects. Proceedings of the 50th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, pp. 8—10, Symp. Ring Theory Represent. Theory Organ. Comm., Yamanashi, 2018.（https://ring-theory-japan.com/ring/oldmeeting/2017/report2017/Aihara.pdf）（査読無し）
5. Takuma Aihara and Yuya Mizuno, Classifying tilting complexes over preprojective algebras of Dynkin type. Algebra Number Theory 11 (2017), no. 6, pp. 1287—1315.（DOI: 10.2140/ant.2017.11.1287）（査読有り）

〔学会発表〕（計９件）

1. 相原琢磨, Silting-connected triangulated categories. 第８回（非）可換代数とトポロジー, 2018 年.
2. 相原琢磨, Silting mutation theory: foundation and application I, II. 第４回ワークショップ「非可換 Gorenstein 代数とその周辺」, 2017 年.
3. 相原琢磨, Applying silting reduction. 名古屋大学環論表現論セミナー, 2017 年.
4. 相原琢磨, Singularity categories and silting objects. 第５０回環論および表現論シンポジウム, 2017 年.
5. 相原琢磨, On the existence of silting objects. 第６２回代数学シンポジウム, 2017 年.
6. 相原琢磨, 三角圏の基本事項について（1）（2）（3）. 第１３回可換環論サマースクール, 2016 年.
7. 加瀬遼一, 相原琢磨, Algebras sharing the same poset of support τ-tilting modules with tree quiver algebras. 第４９回環論および表現論シンポジウム, 2016 年.
8. Takuma Aihara, Tilting mutation and flips of Brauer graph algebras. Workshop on Brauer graph algebras, 2016 年.
9. 相原琢磨, 準傾連結三角圏. 大阪表現論セミナー, 2015 年.