

令和元年6月11日現在

機関番号：32607

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17517

研究課題名(和文) 様々な多重ゼータ関数と超幾何関数の関係とその応用

研究課題名(英文) A relation between the various multiple zeta-functions and the hypergeometric function and its application

研究代表者

岡本 卓也 (Okamoto, Takuya)

北里大学・一般教育部・講師

研究者番号：70633197

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の研究成果は以下の2点である。

(1) Euler-Zagier型の多重ゼータ関数と超幾何関数の関係を明らかにした。

(2) A2, B2, G2型のルート系のゼータ関数の正の整数点での値をリーマンゼータ関数とDirichletのL関数の正の整数点での値の関係を明らかにした。さらに, A3型のルート系のゼータ関数の正の整数点での値をA2型のルート系のゼータ関数の正の整数点での値の関係も明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多重ゼータ関数と超幾何関数の関係を用いることで, 多重ゼータ関数の関数等式を得られる可能性がある。そして, このように超幾何関数を通して, 様々な多重ゼータ関数を捉えることで, 様々な多重ゼータ関数に対して有効であるその値の挙動を考察するための研究手法を与えることができる可能性がある。また, ルート系のゼータ関数に關係する多重ゼータ関数の値の挙動の考察を行うことができれば, 物理系への応用が期待できる。また, ルート系のゼータ関数と他の多重ゼータ関数の関係を明らかにすることで, 数理論理に關連するある体積の関係を明らかにすることができた。

研究成果の概要(英文)：The research results of this research are the following two parts.

(1) We gave a relation between the Euler-Zagier multiple zeta-function and the generalized hypergeometric function.

(2) We obtained evaluation formulas between the values of the zeta-functions of the root system of type A2, B2 and G2 for positive integers and the values of Riemann zeta-function and Dirichlet L-function for the positive integer. And also, we gave the relations between the values of the zeta-functions of the root system of type A2 and A3 for positive integers.

研究分野：解析的整数論

キーワード：多重ゼータ関数 超幾何関数 関数等式 ベルヌーイ多項式 ルート系のゼータ関数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究における研究対象は多重ゼータ関数である。その多重ゼータ関数はリーマンゼータ関数の多重化であり、様々な分野と関わりがある。例えば、小森氏、松本氏、津村氏により導入された一種の多重ゼータ関数であるルート系のゼータ関数は物理学者 Witten が与え、Zagier により定式化された向き付け可能な閉 2 次元曲面上の半単純連結コンパクトリー群 G による量子ゲージ理論の分配関数の定数部分の拡張である。そして、その関数の正の整数点の値は閉 2 次元曲面上の主 G 束の平坦接続全体の体積に関係し、ルート系のゼータ関数は数理論理学と深く関わりがある()。この他にも、多重ゼータ関数は保型形式、ポリログや多重ポリログ、超越数論などと深く関わり、多重ゼータ関数の正の整数点での値の関係式を考察することが重要となる。

実際に、私はこれまでに A_2, B_2, G_2 型のルート系のゼータ関数の正の整数点での値をクラウゼン関数などの一重和の正の整数点での値を用いて表した()。また、私は A_2, B_2, B_3 型のルート系のゼータ関数に関係する一般化された Mordell-Tornheim 型の 2 重, 3 重ゼータ関数(無限和が 2 個か 3 個)の正の整数点での値と Dirichlet の L 関数の正の整数点での値との明示公式を与えた()。

このように私も含め、多重ゼータ関数を扱う数学者はその正の整数点での値に注目することが多い。一方で、多重ゼータ関数(ルート系のゼータ関数)と分配関数の関わりから見れば、多重ゼータ関数の正の整数点での値に限らず、多重ゼータ関数の値の挙動の考察も重要となる。しかし、多重ゼータ関数は多変数関数であるため 1 変数関数であるリーマンゼータ関数より扱いが格段に難しくなっている。そのことが原因で、多重ゼータ関数の値の挙動の研究は思うように進まず、まだ十分には行われていない。

2. 研究の目的

本研究の目的は「様々な多重ゼータ関数の値の性質」を考察することである。しかし、研究の背景で述べたように、多重ゼータ関数は多変数関数であるため、扱いが難しくなっており、多重ゼータ関数のみに着目して、研究を行うことは困難となる。

そのため、私は多重ゼータ関数を本質的に理解するための核となる扱いやすい関数に着目することが重要であると考えた。そこで、私は Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数と超幾何関数の関係を用いて、その関数等式を与えた結果()に注目した。このような考え方を他の多重ゼータ関数にも応用することができれば、値の挙動に関する結果である関数等式を与えることができる可能性がある。さらに、私はこのような多重ゼータ関数と超幾何関数の関係や関数等式を用いれば、多重ゼータ関数の細かな値の挙動や正の整数点での値の関係式を考察できる可能性があると考えた。そのため、私は様々な多重ゼータ関数に対して、超幾何関数との関係性を明らかにすることが重要であると考えた。具体的な本研究のテーマは以下の 2 点である。

(1) 多重ゼータ関数と超幾何関数の関係の考察

(2) 多重ゼータ関数の値の挙動や正の整数点での値の関係式の考察

3. 研究の方法

本研究では Euler-Zagier 型や Mordell-Tornheim 型の多重ゼータ関数などのルート系のゼータ関数に関連する多重ゼータ関数に対して、以下の研究を行う。

(1) 多重ゼータ関数と超幾何関数との関係を明らかにし、それを用いて多重ゼータ関数の関数等式を与える。また、具体的な研究手法は以下の通りである。

まず、古典的に知られているリーマンゼータ関数のガンマ関数を用いた積分表示の一般化である多重ゼータ関数の積分表示を与えることで、多重ゼータ関数と超幾何関数との関係を明らかにする。そして、その超幾何関数の変換公式などを用いることで、その多重ゼータ関数の関数等式を与える。しかしながら、リーマンゼータ関数の考え方を多変数関数である多重ゼータ関数に安直に適用できない可能性がある。具体的には積分路の変更が必要になってくるが、多変数関数の場合はどの変数に着目するかによって、それに対応する積分路を上手く変形する必要がある。

(2) 多重ゼータ関数の正の整数点での値の関係式を考察する。また、この研究の具体的な研究手法は以下の通りである。

多重ゼータ関数の正の整数点に上手く条件を付けて、その(1)で求めた関数等式を用いることで、その多重ゼータ関数の条件を付けた正の整数点での値と多重ベルヌーイ数との関係を明らかにする。そして、それに多重ベルヌーイ数の関係式を用いることで、その多重ゼータ関数の条件を付けた正の整数点での値と他の多重ゼータ関数の正の整数点との関係式を考察する。また、多重ベルヌーイ数の母関数の関係式を考察することで、多重ベルヌーイ数の関係式は得られると考えている。

しかしながら、多重ゼータ関数は多変数関数であるため、正の整数点に上手く条件を付けて、関数等式を用いたとしても、そのような多重ゼータ関数の正の整数点での値の関係式を考察で

きない場合も考えられる．そのときは、関数等式を使わず、多重ゼータ関数の正の整数点とポリログとの関係に注目し研究を行う．具体的には、多重ゼータ関数の正の整数点とポリログの関係式を用いることで、多重ゼータ関数の正の整数点をベルヌーイ多項式を用いて表す．そして、そのベルヌーイ多項式をベルヌーイ多項式の関係式を用いて変形することで、他の多重ゼータ関数との関係を明らかにする．

4．研究成果

本研究の研究成果は以下の2つである．

(1) 多重ゼータ関数と超幾何関数に関連する結果

多重ゼータ関数と超幾何関数の関係を考察した．具体的には、Euler-Zagier 型の多重ゼータ関数と超幾何関数の考察を行なった．すでに、Euler-Zagier 型の2重ゼータ関数に対しては、超幾何関数の関係明らかになっており、すでに関数等式を与えられている(). つまり、ここではその研究の一般化についての考察を行なった．

その結果、Euler-Zagier 型の多重ゼータ関数の積分表示を与えることに成功した(これについてはプレプリントを作成中である)．この積分は合流型超幾何関数の積分表示(1重積分)を多重化した積分(重積分という意味)となっている．私はこの積分がある種の超幾何関数の役割を果たすと考えている．

しかしながら、このある種の超幾何関数であると期待される重積分の性質はまだ明らかにできていない．ここでいう性質とは、超幾何関数の変数変換の性質である．これを与えることができれば、Euler-Zagier 型の多重ゼータ関数の関数等式を与えることが可能となる．そのため、この変数変換の性質については、これからも研究を行なっていく．

(2) 多重ゼータ関数の正の整数点に関連する結果

A2, B2, G2 型のルート系のゼータ関数の一般化した2重ゼータ関数の正の整数点での値の考察を行った．この研究は, の研究と深く関係する．

具体的には, A2, B2, G2 型のルート系のゼータ関数はそれぞれ変数の数が異なるが、それらのルート系のゼータ関数の正の整数点での値は部分分数分解を行うことにより、本質的には3変数の2重ゼータ関数の正の整数点に帰着することができる(これは においてすでに与えた結果である)．そして、その3変数の2重ゼータ関数の正の整数点の値を積分を用いて表し、その被積分関数に現れるベルヌーイ多項式にベルヌーイ多項式の関係式を用いることにより1重和の関数との関係を明らかにした．この結果により, A2, B2, G2 型のルート系のゼータ関数のある条件を付けた正の整数点での値がリーマンゼータ関数や Dirichlet の L 関数の正の整数点を用いて表すことに成功した．この結果はすでに出版されている()．

また、この他に A3 型のルート系のゼータ関数の正の整数点での値の考察も行なった．ここでは、まず、A3 型のルート系のゼータ関数の正の整数点での値に部分分数分解を用いて、3重ゼータ関数の正の整数点での値の和に帰着できることを示した．そして、A2, B2, G2 型のルート系のゼータ関数の一般化した2重ゼータ関数の正の整数点での値の考察で用いた方法を基にして、その3重ゼータ関数の正の整数点での値を考察した．

具体的な研究成果としては、A3 型のルート系のゼータ関数のある条件を付けた正の整数点での値が A2 型のルート系のゼータ関数の正の整数点での値との関係を明らかにした．この結果は A2 型のルート系のゼータ関数のある条件を付けた正の整数点での値が A1 型のルート系のゼータ関数の正の整数点での値を用いて表すことができる結果の類似になっており、ルート系のゼータ関数のつながりを明確にできる有意義な結果である．この結果に関してはプレプリントを作成中である．

しかしながら、一般の A_r 型のルート系のゼータ関数 (r は4以上の整数) の正の整数点での値と他のルート系のゼータ関数との関係は明らかにできていない．そのため、一般の A_r 型のルート系のゼータ関数の正の整数点での値に関しては、今後も研究する必要がある．さらには、 A_r 型に限らず他のルート系のゼータ関数の正の整数点での値に関しても、それぞれのつながりについて研究する必要がある．

引用文献

- S. Kadota, T. Okamoto and K. Tasaka, Evaluation of Torheim's type of double series, Illinois Journal of Math. Vol.61 (2017), No.1-2, pp.171-186.
- K. Matsumoto, Functional equation for double zeta functions, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 136 (2004), 1-7.
- T. Okamoto, Multiple zeta values related with the zeta-function of the root system of type A2, B2, and G2, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 61, No. 1, 9-27, (2012).
- T. Okamoto, On alternating analogues of the Mordell-Tornheim triple zeta values, J. Ramanujan Math. Soc, 28, No. 2, 247-269, (2013).
- E. Witten, On quantum gauge theories in two dimensions, Commun. Math. Phys. 141,

153-209, (1991).

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

S. Kadota, T. Okamoto and K. Tasaka, Evaluation of Torheim 's type of double series, Illinois Journal of Math. Vol.61 (2017), No.1-2, pp.171-186.

、 DOI:10.1215/ijm/1520046214

T. Okamoto and T. Onozuka, Functional equation for the Mordell-Tornheim multiple zeta function, Funct. Approx. Comment. Math. vol.55 (2016), No.2, pp.227-241.

DOI:10.7169/facm/2016.55.2.6

T. Okamoto and T. Onozuka, Mean value theorems for the Mordell-Tornheim double zeta-functions, The Ramanujan Journal, vol.37 (2015), No.1, pp.131-163.

DOI:10.1007/s11139-014-9593-4

T. Okamoto and T. Onozuka, On the various mean values of the Dirichlet L-functions, Acta Arith, vol.167 (2015), No.2, pp.101-115.

DOI:10.4064/aa167-2-1

〔学会発表〕(計 5 件)

岡本卓也, A relation between the multiple zeta-function and the hypergeometric function and its application, 第12回ゼータ若手研究集会, 名古屋大学(愛知県名古屋市), 2019年2月.

岡本卓也, A3型のルート系ゼータ関数の整数点での値, 解析数論セミナー, 名古屋大学(愛知県不老町), 2017年6月.

岡本卓也, G2型のルート系ゼータ関数の整数点での値, 解析数論セミナー, 名古屋大学(愛知県不老町), 2016年11月.

岡本卓也, 小野塚友一, Dirichlet の L 関数の平均値, 早稲田整数論セミナー, 早稲田大学(東京都新宿区), 2015年12月.

岡本卓也, 小野塚友一, Dirichlet の L 関数の平均値, RIMS 研究集会, 「解析的整数論とその周辺」, 京都大学(京都府京都市) 2015年11月.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

http://www.clas.kitasato-u.ac.jp/math/member_okamoto.html

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。