

令和 2 年 6 月 15 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K17521

研究課題名（和文）K3曲面論に現れる有限群の研究

研究課題名（英文）Finite groups in the theory of K3 surfaces

研究代表者

大橋 久範 (Ohashi, Hisanori)

東京理科大学・理工学部数学科・准教授

研究者番号：40547006

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：主にK3曲面と非常に関係の深いエンリケス曲面上の自己同型の幾何学について、次の研究を行い、研究集会や論文での発表を行った。1．II型エンリケス曲面の新しい射影モデルとモジュライ空間の記述について。2．エンリケス曲面上の無限位数自己同型の力学的次数について。3．エンリケス曲面上の位数4の対称性について。

研究成果の学術的意義や社会的意義

K3曲面やエンリケス曲面の自己同型は、1970年代に始まり現代にいたるまで、たくさんの研究者の興味を惹きつけてきた。その理由は、これらの曲面に対するトレリ型定理をはじめとする非常に抽象的な理論が、射影モデルや自己同型の記述といった非常に具体的な結論を導くという、大きな枠組みの魅力にあると感じられる。今回の一連の研究においても、この視点を押し進めて、エンリケス曲面上の自己同型を抽象的な格子理論で統制する様々な現象を記述することができた。

研究成果の概要（英文）：I have made studies and presentations in conferences/papers on the following topics, mainly on the geometry of automorphisms of Enriques surfaces, which are closely related to K3 surfaces. 1. New projective models and descriptions of moduli spaces of the type II Enriques surfaces. 2. On the dynamical degrees of automorphisms of Enriques surfaces. 3. Symmetries of order 4 on Enriques surfaces.

研究分野：代数幾何学

キーワード：エンリケス曲面 K3曲面 自己同型

1. 研究開始当初の背景

(1) K3 曲面、エンリケス曲面の有限自己同型群についての研究が積み重ねられつつあったが、マチウ群との関係に代表されるような、周辺分野とのより不思議な、深い結びつきについてはまだまだ未知のものと期待されている。

(2) 全自己同型群が有限になるような複素数体上で定義されたエンリケス曲面の族は、2つの1次元族と5つの孤立例に限るということが1980年代の論文により知られていた。これは、エンリケス曲面の自己同型群の振る舞いが、よりよく知られていた代数曲線、K3曲面などの場合と根本的に異なることを定量的に見出したものであり、大切な結果である。これらの曲面の存在を如実に示す射影モデルの構成は、現代で堀川モデルと呼ばれている、射影直線の直積上に対合不変な(4,4)次式を定義する方法であり、多くの応用を持つ良いモデルではあるが、自己同型の観点からは、自己同型があくまでも因子のレベルでの対称性としてしか明瞭にできないという難しさも含むものであった。

(3) K3 曲面やエンリケス曲面上の無限位数の自己同型について、位相的エントロピーという複素力学系のアイデアから現れる量を用いて定量的に差別化するというアイデアが2000年代から何人かの著名な研究者によって開拓されてきた。特にK3曲面については高度な数論的構成とアルゴリズムの開発により最小エントロピー問題や力学的スペクトラムの記述問題の部分的な解決などがなされてきたが、エンリケス曲面の自己同型についてはスタート地点にあたる結果がアナウンスされた段階であった。

(4) エンリケス曲面上の自己同型については正確なことがわかっていない部分が多い。(2)で述べたように、全自己同型群が有限という条件下では(複素数体上では)分類と記述ができていたが、K3曲面で知られているような一般の素数位数の非シンプレクティック自己同型の位相的・格子理論的記述の対応物や、そのモジュライの記述の対応物などはあまりよくわかっていなかった。そんな中で、私が関わった仕事として、位数2の自己同型(いわゆる対合)についてはかなり正確な記述ができていた(2014年)。また、有限な非シンプレクティック自己同型がそれほど多くは存在しないこと、中でも最も代表的なものについては正確に分類・記述できることをプレプリントの中で示していた。この方向で進むとすると、目下の目標は位数4の対称性の位相的、格子理論的な分類とモジュライの記述が自然な対象であった。

(5) 複素数体上のK3曲面の有限シンプレクティック自己同型群として現れる有限群は分類されていて、その全体像についてのマチウ群との非常に美しい関係が1980年代から知られている。これを正標数、特に13以上の「一般の」正標数に一般化する結果も2000年代に得られていた。穏やかな作用の場合に新しい現象として見られるのが例外群と呼ばれる一連の群だが、群をすべて分類することにより例外群がマチウ群の部分群になっていることはわかるものの、軌道の数と同じでも可能な群と不可能な群があったりして、標数0の場合と比較して不透明な部分が多く、より良い理解があるのではないかと個人的には思っていた。また、野性的な群についての分類は標数11の場合を除いていまだに完成していない。

2. 研究の目的

代数曲面の中でもK3曲面やエンリケス曲面は、コホモロジー群のなす格子構造を用いてモジュライや自己同型を記述できるという非常に良い性質を持っている。研究の目的は、この性質から導かれるトレリ型定理を一つの軸に、具体的な射影幾何学と抽象的なモジュライ理論が融合して現れるような対象を見つけ、自己同型の観点から詳しく記述することである。

3. 研究の方法

(1) 自己同型を分類する段階では固定点集合に課される数値的条件、コホモロジー表現に課される数値的条件などが第一の必要条件として現れる。これらは多くの場合に位相的な条件と呼んで良いと考えられる。より精密には、格子表現を何らかの一般論を援用して分類し、モジュライ空間を記述し、その一般元や一つのメンバーを同定して射影的に記述することができれば、トレリ型定理から非常に強い結論を得ることができる。射影モデルを見つけるのは、いろいろな場合を頭の片隅に置きながら、偶然理解が進むのを待つような作業になる。

(2) 得られた結果について発表し、コメントをもらってさらに発展を目指すのも重要なステップになる。国外での発表として、アメリカでの研究集会(University of Utah)、ドイツのLeibniz university Hannoverでのセミナー、ドイツでの研究集会(Oberwolfach研究所)、イタリアでの

研究集会 (Levico Terme) で研究成果の発表をする機会を持つことができた。

4. 研究成果

(1) 次に述べる結果を得ることができた。

(2) 非特異有理曲線の配置の観点から Type II と呼ばれている、全自己同型群が有限になるようなエンリケス曲面の一次元族について精密な記述を得た。特に、四面体の六辺に沿って特異点を持つ 6 次超曲面である Fano モデルを用いた新しい射影モデルを見出した。既知の射影モデルと比較すると、ここには自己同型群が線型に作用していて、完全に可視化できることから、最も自然な射影モデルと言ってもいいように思う。この結果として、例えば (K3 曲面の場合に比べて複雑になる) 固定点の様子などが簡単かつ正確に計算できるようになる。また、そのモジュライ空間について調べ、周期領域を上半平面と同一視した場合に、対応するモノドロミー群が保型関数論で良く知られている合同部分群と一致していることを計算することができた。この帰結として、対応する楕円モジュラー曲面がエンリケス曲面の二次ひねり (quadratic twist) 構造、楕円曲線束、モジュライ曲線に繰り返し現れているという現象を見つめることができた。

(3) エンリケス曲面上の (無限位数) 自己同型の位相的エントロピー全体からなる集合、つまり力学的スペクトラムと呼ばれる集合についての研究を行った。先行研究にヒントを得ているような計算をした結果、エンリケス曲面に関する主要なアイデアの一つである「数値的コホモロジー群への作用の 2 を法とする還元」から得られる必要条件を精密化して、力学的スペクトラムについてより多くの制限がわかるということを見出すことができた。また同時に、ねじれコホモロジー群への作用の位数の可能性を分類した。これは、サレム数と関わる位相的エントロピーと本質的に異なる、無限位数自己同型に対する新しい類別を見出した点で、意味があると考えられる。これらの内容については論文と日本語での概説を発表させてもらうことができた。論文の中では、一つの可能性として、曲面を固定した中での力学的スペクトラムを絞ることができる例を計算している点も個人的には面白いと考えている。

(最近になって、エンリケス曲面上の最小エントロピーの問題の解決がアナウンスされ、また力学的スペクトラムやねじれコホモロジー作用についてのより精密な条件についてもそれぞれ別の研究グループが結果を発表している。)

(4) エンリケス曲面上の位数 4 の対称性について調べ、分類を得た。まずは対合の分類を下敷きにして、固定点集合に課される対称性から必要条件を求めた。いくつかの場合には、そこに複雑な格子理論、あるいは楕円曲線束を用いたより精密な記述を追加することで、位数 4 の可能な対称性について、ある一つの場合だけを除いて分類することができた。残った孤立固定点の場合の自己同型・曲面の構成、また特徴的な高種数曲線が存在しない場合のモジュライ空間の連結性・既約性についてはまだわかっていない。一方、例として構成したほとんどの場合はモジュライ空間は単有理性を持ち、簡潔に記述できている。

(5) 正標数の K3 曲面上の有限シンプレクティック自己同型群として現れる群について計算を行った。特に、先行論文にある微妙な間違いについて結論を出し、同時に穏やかな群の存在について格子理論的な特徴づけを見つめることができた。野性的な場合に比べれば簡単なことではあるが、事前と比較して極めて見通しが良くなったことは特筆に値すると思う。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 大橋久範	4. 巻 664
2. 論文標題 サレム数とK3曲面の自己同型	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 55-60
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Matsumoto, H. Ohashi, S. Rams	4. 巻 291
2. 論文標題 On automorphisms of Enriques surfaces and their entropy	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 2084-2098
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/mana.201700329	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shouhei Ma, Hisanori Ohashi and Shingo Taki	4. 巻 367
2. 論文標題 Rationality of the moduli spaces of Eisenstein K3 surfaces	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 8643-8679
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/6349	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計28件（うち招待講演 24件/うち国際学会 16件）

1. 発表者名 Hisanori Ohashi
2. 発表標題 Topological classification of automorphisms on Enriques surfaces of order 4
3. 学会等名 working workshop on Calabi-Yau varieties and related topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hisanori Ohashi
2. 発表標題 Topological classification of automorphisms on Enriques surfaces of order 4
3. 学会等名 Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 エンリケス曲面の自己同型の性質と、エントロピーについて
3. 学会等名 第15回代数曲面ワークショップat秋葉原 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ohashi Hisanori
2. 発表標題 On automorphisms of Enriques surfaces and their topological entropy
3. 学会等名 Hakodate workshop on arithmetic geometry 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ohashi Hisanori
2. 発表標題 On automorphisms of Enriques surfaces and their entropy
3. 学会等名 Workshop on Calabi-Yau manifolds -arithmetic, geometry and physics- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hisanori Ohashi
2. 発表標題 On automorphisms of Enriques surfaces and their entropy
3. 学会等名 Japanese-European symposium on symplectic varieties and moduli spaces (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 エンリケス曲面の自己同型とエントロピーについて
3. 学会等名 東京電機大学 数学講演会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 エンリケス曲面の自己同型とエントロピーについて
3. 学会等名 東工大 数論・幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 On automorphisms of Enriques surfaces and their entropy
3. 学会等名 葉層構造の幾何学とその応用 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Ohashi Hisanori
2. 発表標題 On automorphisms of Enriques surfaces and their entropy
3. 学会等名 K3 surfaces and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 Automorphisms of Enriques surfaces of order 4
3. 学会等名 代数幾何学研究集会 -宇部- (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ohashi Hisanori
2. 発表標題 On automorphisms of Enriques surfaces and their entropy
3. 学会等名 正標数の代数幾何とその関連する話題 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 エンリケス曲面の自己同型のエントロピーについて
3. 学会等名 代数幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 エンリケス曲面の自己同型について
3. 学会等名 新潟代数セミナー（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 Enriques surfaces of type II and an elliptic modular surface of level 4
3. 学会等名 射影多様体の幾何とその周辺 2016（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Ohashi Hisanori
2. 発表標題 Enriques surfaces of type II and an elliptic modular surface of level 4
3. 学会等名 On explicit description of holomorphic symplectic varieties（国際学会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Ohashi Hisanori
2. 発表標題 On Enriques surfaces of type II and some elliptic modular surfaces
3. 学会等名 Calabi-Yau manifolds: arithmetic, geometry and physics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 エンリケス曲面の自己同型について
3. 学会等名 談話会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Ohashi Hisanori
2. 発表標題 On some families of Enriques surfaces parametrized by rational modular curves
3. 学会等名 Rationality and self-maps of algebraic varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 On some families of Enriques surfaces parametrized by rational modular curves
3. 学会等名 代数幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hisanori Ohashi
2. 発表標題 Gorenstein \mathbb{Q} -homology projective planes
3. 学会等名 Joint Workshop: Geometry and Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 エンリケス曲面の自己同型について
3. 学会等名 代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Hisanori Ohashi
2. 発表標題 Non-semi-symplectic automorphisms of Enriques surfaces
3. 学会等名 Research seminar on algebraic and arithmetic geometry (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 大橋久範
2. 発表標題 エンリケス曲面の自己同型について
3. 学会等名 合同セミナー (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Hisanori Ohashi
2. 発表標題 Curve configurations on Enriques surfaces and automorphism groups
3. 学会等名 Singular curves on K3 surfaces and hyperkaehler manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Hisanori Ohashi
2. 発表標題 The automorphism groups of the Enriques surfaces covered by some symmetric quartic K3 surfaces
3. 学会等名 Arithmetic and Algebraic Geometry 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hisanori Ohashi
2. 発表標題 エンリケス曲面の自己同型について
3. 学会等名 代数幾何セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hisanori Ohashi
2. 発表標題 Symmetries of order four on Enriques surfaces
3. 学会等名 Research seminar on algebraic and arithmetic geometry (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----