

令和元年6月14日現在

機関番号：34411

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17524

研究課題名(和文)多重L関数を用いたMahler測度の多角的研究

研究課題名(英文)Research for multiple Mahler measures via multiple L values

研究代表者

佐々木 義卓 (Sasaki, Yoshitaka)

大阪体育大学・体育学部・准教授

研究者番号：20548771

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：多重ポリログの明示的な解析接続公式を与えた。これは楠氏・中村氏との共同研究による。まず、調和数を補間する関数を用いて2重ポリログの解析接続を与えた。次いで多重調和数を補間する関数を構成し、その関数の留数を解析することで一般的な多重ポリログの解析接続公式を示した。さらに、この明示式を用いて種々の多項式族に関する多重Mahler測度を計算することで、多重Mahler測度と多重L値の関係を得た。一方で、多重ゼータ関数に関連する多重ベルヌーイ数の新たな漸化式を示した。さらに、この漸化式を組合せ論的観点から捉えることで、ロンサム行列の数え上げに関する漸化式を示した。この研究は大野氏との共同研究による。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多重Mahler測度は構造上多重ポリログと深く関係することから、多重ポリログの性質を深く理解することが重要である。特に多重ポリログの明示的な関数関係式は、多重Mahler測度を具体的かつ明示的に計算するためには必要不可欠といえる。また、多重Bernoulli数は多重ゼータ関数と深く関係することから、その性質を見出すことで多重ゼータ関数の新たな性質の解明につながることを期待される。実際に、多重Bernoulli数の新たな漸化式から、ロンサム行列の個数を数え上げに関する等式が得られている。

研究成果の概要(英文)：A functional relation for the multiple polylogarithm which gives an analytic continuation of the multiple polylogarithm was obtained. We first showed the functional relation for the double polylogarithm by using a function which interpolates the harmonic numbers. After that, we give the functional relation for multiple polylogarithm by constructing a function which interpolates the multiple harmonic numbers and investigating residues of the interpolation equation. Furthermore, we try to evaluate multiple higher Mahler measures for several polynomials by using such functional relations. This research was a joint work with Kusunoki and Nakamura. Recurrence formula for poly-Bernoulli numbers was obtained. In fact, we showed similar recurrence formulas hold for the generalized poly-Bernoulli polynomials. Furthermore, we showed that the recurrence formula can be regarded as an enumeration formula for certain restricted lonesum matrices. This research was a joint work with Ohno.

研究分野：解析的整数論

キーワード：多重ゼータ関数 多重L関数 多重Mahler測度 多重Bernoulli数 多重ポリログ ロンサム行列

1. 研究開始当初の背景

Mahler 測度は複素数係数 Laurent 多項式に対して、その単位円周上での積分によって定義される実数であり、L 関数の特殊値との関係や多様体の体積としての解釈、周期的解釈など、多くの分野と関連する非常に興味深い研究対象である。本研究では主に L 関数の特殊値との関係に焦点を当てている。Mahler 測度と L 関数の特殊値の関係は、1981 年に Smyth によって Mahler 測度と Dirichlet L 関数の特殊値との関係が初めて報告され、その後、様々な形でその拡張がなされ、一般に Mahler 測度と原始的な 2 次指標に付随する L 関数の特殊値との関係が予想されている。また、Deninger によって Mahler 測度の周期的解釈が与えられたことから、Mahler 測度と曲線に付随する L 関数の特殊値の関係に関する膨大な数値実験データが Boyd により与えられている。加えて、2003 年には Rodriguez-Villegas によって、ある K3 曲面を定義する多項式の Mahler 測度と、その K3 曲面と関連する保型 L 関数の特殊値との関係に関する興味深い予想が提示されている。これら Boyd や Rodriguez-Villegas の予想を実証することが当分野の大きな課題の一つである。また、近年は黒川・Lalín・落合により Mahler 測度の拡張として多重 Mahler 測度が導入された。これまでに多重 Mahler 測度は、多重ゼータ値との関係など Mahler 測度と酷似した性質を持つことを示唆する性質が解明されてきており、新たな性質の追究も課題と言える。

2. 研究の目的

上述の通り、Mahler 測度と L 関数の特殊値との関係を示す膨大な数値データの実証が当分野の課題の一つである。本研究の目的は、多重ゼータ関数やその拡張である多重 L 関数の観点から、Mahler 測度と L 関数の特殊値の関係解明を図ることであった。とりわけ、近年の Shinder-Vlasenko の研究では、K3 曲面に関連する多項式に付随する Mahler 測度が 2 重保型 L 関数の特殊値を用いて表されるという研究結果が与えられている。これは、Rodriguez-Villegas によって提起された Mahler 測度と L 関数の特殊値の関係に関する予想が、多重 L 関数の特殊値で述べられたものであり、その完全な解決には多重 L 関数と従来の L 関数の特殊値の関係を追求していくことが重要であることを示唆していると言える。そのため、本研究では多重ゼータ関数に焦点を当てている。また、近年導入された多重 Mahler 測度の Mahler 測度と同種の性質がいくつか得られていることを上で述べた。多重 Mahler 測度の諸性質を追求していくことも本研究の目的の一つであり、とりわけ、多重 Mahler 測度と多重 L 関数の特殊値の関係解明に焦点を当てた。黒川・Lalín・落合によって初めて報告された多重 Mahler 測度と多重ゼータ値の関係は、Mahler 測度と L 関数の関係の類似と考えられる。この先行研究を拡張して、多重 Mahler 測度と多重 L 関数の関係を組織的に解明していくことを目標とした。

3. 研究の方法

Mahler 測度と L 関数の特殊値の関係解明に向けて多重ゼータ関数の観点からのアプローチを計画した。特に、Rogers-Zudilin による保型 L 関数の特殊値を付随する保型形式のエータ積表示を元に解析していく方法に着目し、それを多重 L 関数の特殊値の解析に応用することを試みた。一方、多重 Mahler 測度と多重 L 関数の特殊値の関係を解明するために、多重ポリログの関数関係式を応用した多重 Mahler 測度の解析を計画した。多重 Mahler 測度の興味深い性質が得られているとはいえ、その拡張を図るには汎用性のある効果的な計算方法を確立することが望まれる。多重 Mahler 測度と多重ポリログは密接に関係しており、一方で多重ポリログは多様な関数関係式を有することが知られているため、それを応用して多重 Mahler 測度の汎用的な計算方法の確立を目指した。

4. 研究成果

多重 L 関数の特殊値の解析に関しては、L 関数の特殊値と多重 L 関数の特殊値の関係を解明するために、計算機を援用して保型形式のエータ積表示の構造や保型形式の空間の構造に関する基礎情報を収集するだけでなく、それを元に実際のエータ積表示から誘導されるテータ級数の代数的関係式を応用することで、付随する L 関数や多重 L 関数の解析を行った。一方、多重ゼータ関数の特殊値に関しては、近年小野塚によって得られた多重ゼータ関数の漸近展開を精密に解析することで、非正整数点での特殊値間の関係、分類等を行い、さらにはそれを用いて 3 重ゼータ関数の不確定特異点の解消に取り組んだ。他方、多重 Mahler 測度を効果的に計算するために、多重ポリログの明示的な関数関係式の研究にも取り組んだ。とりわけ、楠氏・中村氏との共同研究において、多重ポリログの明示的な解析接続公式を示した。当研究は段階的に行われ、まず、調和数を補間する関数を用いて 2 重ポリログの解析接続を与えた。次いで多重調

和数を補間する関数を構成し、その関数の留数を解析することで一般的な多重ポリログの解析接続公式を示した。この明示式を用いて種々の多項式族に関する多重 Mahler 測度を計算することで、多重 Mahler 測度と多重 L 値の関係を導いた。さらに、その応用として多重ポリログの帰納的な構造を述べたパリティ性の証明や、Borwein 等によって導入された多重 Clausen 関数、多重 Glaishers 関数の明示式を与えた。その他にも、大野氏との共同研究において、多重ゼータ関数に深く関連する多重 Bernoulli 数の新たな漸化式を与えた。多重 Bernoulli 数の性質が、多重ゼータ値の関係式の導出に応用されたことから、本研究結果も多重ゼータ値の研究に応用できるのではないかとと思われる。また、新たに得た漸化式を組合せ論的に捉えることで、符号理論などに関連するロンサム行列の個数の数え上げに関する明示式も得た。さらに、多重 Bernoulli 数の拡張である一般多重 Bernoulli 多項式においても、同種の漸化式が成り立つことを示したことに加えて、Carlitz が導入した重み付き Stirling 数の性質を一般多重 Bernoulli 多項式の解析に応用できることが分かってきたため、重み付き Stirling 数の観点から多重 Bernoulli 数の種々の性質の多項式補間について現在も研究を進めている。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 6 件)

Yasuo Ohno, Yoshitaka Sasaki, Recurrence formulas for poly-Bernoulli polynomials, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 掲載確定

<https://mathsoc.jp/publication/ASPM/aspm.html>

佐々木義卓, 多重 Bernoulli 数の帰納的關係式とその組合せ論的解釈, 数理解析研究所講究録, 掲載確定

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/kokyuroku.html>

Yasuo Ohno, Yoshitaka Sasaki, On poly-Euler numbers, *Journal of the Australian Mathematical Society*, Vol.103, 2017, 126–144

DOI: 10.1017/S1446788716000495

大野泰生, 佐々木義卓, 多重ベルヌーイ数の組合せ論, 第 33 回代数的組合せ論シンポジウム報告集, Vol.1, 2016, 64–67

<https://hnozaki.jimdo.com/proceedings-symp-alg-comb/no-33/>

Yoshitaka Sasaki, Zeta Mahler measures, multiple zeta values and L-values, *International Journal of Number Theory*, Vol.7, 2015, 2239–2246

DOI: 10.1142/S1793042115501006

佐々木義卓, 多重ゼータ関数の不確定特異点の解消にむけて, 2015 年早稲田整数論研究集会報告集, Vol.1, 2015, 114–123

<https://www.waseda.jp/sem-wnt/symposium/sympo15-j.html>

[学会発表](計 9 件)

Yoshitaka Sasaki, Recurrence formulas for poly-Bernoulli numbers and their combinatorial interpretations, *Analytic Number Theory and Related Topics*, 京都大学数理解析研究所, 2018

Yoshitaka Sasaki, Recurrence formulas for generalized poly-Bernoulli polynomials, *Various Aspects of Multiple Zeta Functions*, 名古屋大学, 2017

大野泰生, 佐々木義卓 (発表者), 制限付きロンサム行列の数え上げ, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会, 山形大学, 2017

Yoshitaka Sasaki, Multiple higher Mahler measures and Zeta, L-values, *Workshop on Polylogarithms, MZVs and Mahler measures*, 東北大学, 2016

大野泰生, 佐々木義卓 (発表者), 多重ベルヌーイ数の零化公式とその応用, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2016

大野泰生, 佐々木義卓 (発表者), 一般多重 Bernoulli 数の和公式, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 関西大学, 2016

大野泰生 (発表者), 佐々木義卓, ある 2 部グラフの数え上げと多重ベルヌーイ数について, 離散数学とその応用研究集会 2016, 高城コミュニティセンター, 2016

Yoshitaka Sasaki, Zeta Mahler measures, multiple zeta values and L-values (poster), *The conference of Zeta Functions of Several Variables and Applications*, 名古屋大学, 2015

佐々木義卓, 多重ゼータ関数の不確定特異点の解消にむけて, 解析数論セミナー, 名古屋大学, 2015

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

佐々木義卓ホームページ

<https://sites.google.com/site/yoshitakusasaki/>

関西多重ゼータ研究会

<https://sites.google.com/site/kmzsince2011/>

多重ゼータ研究集会

<https://sites.google.com/site/kkmzvworkshop/home>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号(8桁)：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。