

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和元年6月3日現在

機関番号：37111

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17529

研究課題名(和文)アレクサンドロフ空間の崩壊現象及び距離カレントの幾何学

研究課題名(英文)On collapsing of Alexandrov spaces and geometry of metric currents

研究代表者

三石 史人(Mitsuishi, Ayato)

福岡大学・理学部・助教

研究者番号：80625616

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：報告者は、アレクサンドロフ空間の構造を、空間の収束理論を通じて調べてきた。この場合の収束は、崩壊と非崩壊の場合があり、どちらも考察すべき現象である。今回の研究で得られた成果として、非崩壊収束の場合のアレクサンドロフ空間のリプシッツ・ホモトピー性質の安定性や崩壊する3次元境界付きアレクサンドロフ空間の位相構造の解明が挙げられる。前者について一連の論文を作成し満足のいく結果が得られた。後者は現在進行中の案件である。また、距離カレントは距離空間に対して定義され、そのホモロジーと距離空間の位相について調べた。距離カレントの理論のアレクサンドロフ空間の幾何への応用も得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

曲率が下に有界なリーマン多様体の構造を調べる際に、アレクサンドロフ空間という対象が自然に現れます。アレクサンドロフ空間の適切なモジュライ(空間を要素とする空間)は、グロモフ・ハウスドルフ収束の観点からコンパクトです。コンパクト性は収束列が沢山存在する事を保証します。我々はアレクサンドロフ空間の収束現象からアレクサンドロフ空間の構造を解明する事に従事しました。研究成果で述べた事から、アレクサンドロフ空間について、少しずつですが、その構造を理解する事ができてきています。これらは非常に興味深く今後とも継続してやるべき研究であると考えています。

研究成果の概要(英文)：We were going to study topological/geometric structures of Alexandrov spaces via phenomena of convergence of spaces. Here, convergences are divided into two cases called collapsing and non-collapsing, which are important.

In our study, we obtained a kind of stability of Lipschitz homotopy structure of Alexandrov space in non-collapsing case, and classified the topology of collapsing 3-dimensional Alexandrov spaces with boundary. We have put the former results together in several papers. The latter is on going.

研究分野：アレクサンドロフ空間の幾何学

キーワード：アレクサンドロフ空間 グロモフ・ハウスドルフ収束 崩壊理論 距離カレント

## 1. 研究開始当初の背景

曲率が下に有界な完備リーマン多様体の構造を調べるために、それらの列の極限を考察する方法が有効である。そのとき、極限として得られた空間は、一般に多様体でなく、「曲率が下に有界」という概念を持った距離空間となる。一般に、曲率が下に有界な距離空間をアレクサンドロフ空間と呼び、報告者は、これについて調べている。

まず、アレクサンドロフ空間の適切なモジュライ空間は、上記の空間列の収束の位相(グルモフ・ハウスドルフ位相)についてプレコンパクトである事が知られており、アレクサンドロフ空間の極限は再びアレクサンドロフ空間になる事が知られている。アレクサンドロフ空間の収束は、崩壊とそうでないもの(非崩壊)に分けられるが、どちらも重要な考察すべき現象である。

距離空間上のカレント(距離カレント)の概念が、2000年に Ambrosio と Kirchheim によって導入された。報告者は、距離カレントのホモロジーを考え、アレクサンドロフ空間の幾何学へと応用を考えようとした。

## 2. 研究の目的

アレクサンドロフ空間の崩壊・非崩壊に関する位相的・幾何的な結果を得る。具体的には、崩壊する境界付き3次元アレクサンドロフ空間の位相構造の決定する。また、(一般次元の)アレクサンドロフ空間の非崩壊収束に関するある種の距離構造の安定性を考える。

距離カレントの理論のアレクサンドロフ空間の幾何への応用を考える。

## 3. 研究の方法

各アレクサンドロフ空間は、各パーツがリプシッツ可縮であるような「良い被覆」を持つ事が報告者と共同研究者によって知られていた。これを基本事項とし、非崩壊収束における良い被覆の安定性を調べる。また、境界の無い崩壊する3次元アレクサンドロフ空間の崩壊理論を、崩壊する境界付き3次元アレクサンドロフ空間の構造を調べる方法に拡張する。

## 4. 研究成果

アレクサンドロフ空間の「良い被覆」と呼ばれるものに対する非崩壊収束の下での安定性について結果を得た。ここで、距離空間の相対コンパクトな開集合からなる被覆が、良い被覆とは、その被覆の各開集合は、リプシッツ可縮かつ錘に位相同型で、開集合同士の有限個の交わりもその性質を持つときを言う。まず、報告者と共同研究者によって、各アレクサンドロフ空間は良い被覆を持つ事が知られていた。今回得られた結果は、「非崩壊収束の極限  $X$  に良い被覆を与えたとき、極限に十分近いアレクサンドロフ空間  $Y$  に良い被覆が構成できる」というものである。これを以って「良い被覆の安定性」という。ここで、本当に  $Y$  上に良い被覆が構築可能かどうかという点が論点であった。そのために、ペレルマンのモース理論の亜種を開発し、その点を解決した。また、一般の距離空間が良い被覆を持つとき、その被覆の脈複体と元の距離空間がリプシッツ・ホモトピー同値である事を証明した。これと上記の安定性を合わせて、非崩壊のアレクサンドロフ空間のコンパクトなモジュライに対するリプシッツ・ホモトピー類の有限性を得ることができた。

アレクサンドロフ空間に「鈍角定数」なる量を定義した。しばらく空間はコンパクトとする。この発端として、Grove と Petersen による仕事があった。それは、適切に曲率下限などを一様に持つリーマン多様体に対し、「多様体の中の二点が十分に近ければ、片方の点からみた距離関数ももう片方の点において正則、という事がどちらかの点において成り立つ」という主張を含んでいる。ただし、本来は、二点の近さと正則性の大きさのパラメータを用意して定式化され、このパラメータが空間に依らないという事が大事である。この主張のアレクサンドロフ空間版は、容易に得られるのだが、更に我々は「正則」という部分を「遠くの点からみて角度が鈍角に開いている」という言及に置き換え、証明した。「遠さ」の部分空間の半径(直径の亜種)の半分に固定し、二点の近さについて極限を取ったときの角度の鈍角具合(正則性の大きさ)を測ったものが、我々の鈍角定数である。この概念について、得られた結果は「アレクサンドロフ空間の非崩壊のモジュライにおいて鈍角定数は一様」というものである。これもまた一種の距離構造の安定性と言える。更に「崩壊を許すとき、鈍角定数が零に収束する事と、空間の正規化体積が零に収束する事は同値」という事も得た。更に我々はこれらの主張の非コンパクトアレクサンドロフ空間版も得た。また、いくつかの鈍角定数の亜種に関する剛性定理も得た。

距離カレントのホモロジーと整係数特異ホモロジーは、局所リプシッツ可縮であるような距離空間において同型である事が報告者によって知られていた。一方、アレクサンドロフ空間は局所リプシッツ可縮である事が報告者と共同研究者によって知られていたため、アレクサンドロフ空間においては(ホモロジーを通じて)、距離カレントという幾何学的対象と特異チェーン

という位相的对象を行き来する事ができる。更に報告者は、アレクサンドロフ空間に個々に定義されていた向き付けの概念をより統一的に理解するべく、あらゆる妥当な向き付け概念の同値性を証明した。特に境界のないコンパクトで向き付け可能なアレクサンドロフ空間は、通常通りの基本類を持つ事が分かる。よって、距離カレントに対応物がある。報告者は、距離カレントの mass と特異チェーンの mass の間の不等式を示し、それと Ambrosio と Katz の仕事と合わせ、「アレクサンドロフ空間に対するフィリング不等式」を証明した。

崩壊する境界付き 3 次元アレクサンドロフ空間の位相構造を共同研究者とともに調べている。境界のない場合は、以前に解決済みである。境界がある場合は、空間の二つのコピーをそれらの境界に沿って貼り合わせることによってできる空間(ダブルという)の収束について調べるのが肝心である。ダブルは再びアレクサンドロフ空間になる事がペレルマンによって知られている。特に、我々は、ダブルに自然に作用する対合に関して同変な理論を構築する必要があった。境界のないときに重要な道具だったフロー定理を対合同変な形に拡張した。この研究は現在進行中である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

すべて査読あり。

1. [A. Mitsuishi](#) and T. Yamaguchi, Collapsing three-dimensional closed Alexandrov spaces with a lower curvature bound, *Trans. Amer. Math. Soc.* 367 (2015), 2339-2410.
2. [A. Mitsuishi](#) and T. Yamaguchi, Obtuse constants of Alexandrov spaces, *JMSJ*, 掲載確定.
3. [A. Mitsuishi](#), The coincidence of the homologies of integral currents and of integral singular chains, via cosheaves, *Mathematische Zeitschrift*, pp. 1-35, published online: 17 August 2018,
4. [A. Mitsuishi](#) and T. Yamaguchi, Lipschitz Homotopy Convergence of Alexandrov Spaces, *The Journal of Geometric Analysis*, pp.1-25 published online: 21 August 2018,

〔学会発表〕(計 37 件)

すべて招待講演。

1 から 28 まで国内研究集会, 29 から 37 まで国際研究集会.

1. [三石史人](#), アレクサンドロフ空間の向きと基本類, 京都大学微分トポロジーセミナー, 2015 年 5 月 12 日.
2. [三石史人](#), 崩壊する境界付き 3 次元アレクサンドロフ空間, 第 61 回幾何学シンポジウム, 名城大学, 2014 年 8 月 25 日.
3. [三石史人](#), アレクサンドロフ空間の向きと基本類, 測地線及び関連する諸問題, 熊本大学, 2015 年 1 月 10 日.
4. [三石史人](#), アレクサンドロフ空間の向きと基本類, リーマン幾何と幾何解析, 筑波大学, 2015 年 3 月 7 日.
5. [三石史人](#), アレクサンドロフ空間の位相幾何学, 日本数学会 2015 年度年会 (特別講演), 明治大学, 2015 年 3 月 24 日.
6. [三石史人](#), アレクサンドロフ空間の向きと基本類, 福岡大学微分幾何セミナー, 2015 年 6 月 18 日.
7. [三石史人](#), アレクサンドロフ空間の向きと基本類, 東北大学幾何セミナー, 2015 年 6 月 30 日.
8. [三石史人](#), 断面曲率が下に有界な空間の崩壊理論 I, II (2 講演), 幾何学阿蘇研究集会, 2015 年 9 月 25 日, 26 日.
9. [三石史人](#), アレクサンドロフ空間の良い被覆, 首都大学東京幾何学セミナー, 2015 年 10 月 9 日.
10. [三石史人](#), 3 次元アレクサンドロフ空間の崩壊, 広島大学理学研究科数学専攻 談話会, 2015 年 12 月 22 日.
11. [三石史人](#), アレクサンドロフ空間の良い被覆, 広島大学 トポロジー幾何セミナー, 2015 年 12 月 22 日.
12. [三石史人](#), アレクサンドロフ空間の貼り合わせ, 測地線及び関連する諸問題, 熊本大学, 2016 年 1 月 10 日.
13. [三石史人](#), アレクサンドロフ空間の良い被覆とその応用, 学習院・早稲田 幾何学セナ

- 一, 学習院大学, 2016 年 5 月 13 日.
14. 三石史人, アレクサンドロフ空間の良い被覆とその応用, 微分幾何・トポロジーセミナー, 慶應義塾大学, 2016 年 5 月 30 日.
  15. 三石史人, 崩壊する 3 次元アレクサンドロフ空間, 学習院大学談話会, 2016 年 6 月 21 日.
  16. 三石史人, アレクサンドロフ空間の向きと基本類とその応用, 学習院大学トポロジーセミナー, 2016 年 7 月 1 日.
  17. 三石史人, アレクサンドロフ空間の向きと基本類とその応用, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学セミナーハウス, 2016 年 11 月 4 日.
  18. 三石史人, アレクサンドロフ空間のリプシッツホモトピー収束, 測地線および関連する諸問題, 熊本大学, 2017 年 1 月 7 日.
  19. 三石史人, アレクサンドロフ空間のユークリッド空間への双リプシッツ埋め込み, リーマン幾何と幾何解析, 京都大学, 2017 年 2 月 24 日.
  20. 三石史人, アレクサンドロフ空間の鈍角定数と体積, 第 64 回幾何学シンポジウム, 金沢大学, 2017 年 8 月 28 日.
  21. 三石史人, アレクサンドロフ空間のリプシッツホモトピー収束, 広島幾何学研究集会 2017, 広島大学, 2017 年 10 月 5 日.
  22. 三石史人, 「3 次元アレクサンドロフ空間の崩壊」山口大学集中講義, 2017 年 10 月 23 日 -27 日.
  23. 三石史人, アレクサンドロフ空間の鈍角定数と体積, 2017 年度福岡大学微分幾何研究集会, 福岡大学, 2017 年 11 月 6 日.
  24. 三石史人, アレクサンドロフ空間の鈍角定数と体積, 北海道大学幾何学コロキウム, 北海道大学, 2017 年 11 月 24 日.
  25. 三石史人, アレクサンドロフ空間の鈍角定数と体積, 大阪大学幾何セミナー, 大阪大学, 2017 年 12 月 18 日.
  26. 三石史人, アレクサンドロフ空間の鈍角定数と体積, 測地線および関連する諸問題 2018, 熊本大学, 2018 年 1 月 6 日.
  27. 三石史人, アレクサンドロフ空間の鈍角定数と体積, 横浜国立大学幾何セミナー, 横浜国立大学, 2018 年 6 月 16 日.
  28. 三石史人, ペレルマンのモース理論に現れるファイバーの位相, 測地線と関連する諸問題, 熊本大学, 2019 年 1 月 6 日.
  29. A. Mitsuishi, Locally Lipschitz contractibility of Alexandrov spaces and its applications, Workshop on Analysis and Geometry in metric spaces, Universidad Autonoma de Madrid, Madrid, Spain, 2015 年 6 月 2 日.
  30. A. Mitsuishi, Local Lipschitz contractibility of Alexandrov spaces and its applications, Workshop on metric geometry and geometric analysis, 上海, 中国, 2016 年 2 月 24 日.
  31. A. Mitsuishi, Orientabilities and fundamental classes of Alexandrov spaces and its applications, 国際研究集会 Trends in modern geometry 2016, 東京大学, 2016 年 7 月 21 日.
  32. A. Mitsuishi, Local Lipschitz contractibility of Alexandrov spaces and its applications, Reflections on Global Riemannian Geometry, Tennessee, アメリカ, 2016 年 8 月 20 日.
  33. A. Mitsuishi, Orientabilities and fundamental classes of Alexandrov spaces and its applications, 国際研究集会 Geometric analysis on Riemannian and metric spaces, 京都大学数理解析研究所, 2016 年 9 月 8 日.
  34. A. Mitsuishi, Lipschitz homotopy convergence of Alexandrov spaces, The third Spanish-Japanese workshop on differential geometry, Madrid, Spain, 2017 年 09 月 20 日.
  35. A. Mitsuishi, Comprison angle and volume of Alexandrov spaces, 2017 Chongqing Workshop on Differential Geometry, 重慶市, 中国, 2017 年 11 月 17 日.
  36. A. Mitsuishi, Metric currents and their homologies, 国際研究集会 Conference on 'Metrics and Measures', 東北大学, 2018 年 1 月 12 日.
  37. A. Mitsuishi, Collapsing three-dimensional Alexandrov spaces, 2018 The 4th China-Japan Geometry Conference, 合肥市, 中国, 2018 年 9 月 9 日.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況（計0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6 . 研究組織

研究代表者：三石 史人

ローマ字氏名：MITSUISHI Ayato

所属研究機関名：東北大学(~2016年3月), 学習院大学(2016年4月~2017年3月), 福岡大学(2017年4月~)

職名：助教

研究者番号(8桁): 15K17529

(1) 研究分担者  
無し

(2) 研究協力者  
無し

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。