様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２１ 日現在

機関番号：３２７０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2016
課題番号：１５Ｋ１７５３０

研究課題名（和文）非可分無限次元多様体と写像空間、冪空間の位相に関する研究

研究課題名（英文）Topology of non-separable infinite-dimensional manifolds, function spaces and hyperspaces

研究代表者
越野　克久（Koshino, Katsuhisa）

神奈川大学・工学部・非常勤講師

研究者番号：６０７４９５２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、非可分LF-多様体の位相的性質と、写像空間、冪空間の位相的構造を探求し、非可分無限次元多様体論を発展させることを目的とした。研究期間中、コンパクト部分集合からなる冪空間が非可分ヒルベルト空間と、有限部分集合からなる冪空間が非可分ヒルベルト空間の標準正規直交基底で張られる部分空間と、各々同相になるための同値条件を与えた。LF-多様体の基本定理に関する研究と、写像空間の無限次元多様体性に関する研究については、良い成果を上げることができなかったが、今後の研究に向けて新たな知見を得た。

研究成果の概要（英文）：The aim of this research is to develop the theory of non-separable infinite-dimensional manifolds by investigating topological properties of non-separable LF-manifolds and topological structures of function spaces and hyperspaces. In this research, I gave necessary and sufficient conditions on a space whose hyperspace of compact subset is homeomorphic to a non-separable Hilbert space, and on a space whose hyperspace of finite subsets is homeomorphic to the linear subspace spanned by the canonical orthonormal basis of a non-separable Hilbert space. I could not achieved good results in the study on the fundamental theorems of LF-manifolds, and in the study on detecting infinite-dimensional manifolds among function spaces, but obtained new knowledge for future research.

研究分野：位相幾何学

キーワード：無限次元多様体　LF-多様体　写像空間　冪空間

１．研究開始当初の背景

無限次元空間の位相幾何学は、ヒルベルト空間やヒルベルト立方体、及びそれらの部分空間をモデルとする無限次元多様体を中心に研究されてきた。そして、可分無限次元多様体については多くの研究成果が得られ、理論的にも確立されてきた。
一方、非可分無限次元多様体に関しては未解決の問題も多く、その具体的な例もまだ少ない。近年、無限次元多様体論をより豊富なものとするために、非可分無限次元多様体の位相的な性質の解明と、それらが自然に現れる具体例が求められていた。

(1) LF-多様体に関する研究

局所凸線型完備距離空間からなる単調増大列の帰納極限である局所凸線型位相空間を LF 空間という。多様体間の幾何構造を保つ（微分）同相写像のなす群の位相的な性質は、多様体の幾何構造にも関わる重要な研究対象である。LF 空間をモデルとする LF-多様体は、多様体の（微分）同相群やその部分群として自然に現れることが知られていた。
可分 LF-多様体については、その位相的特徴付けが与えられ、単体分割定理や開埋蔵定理といった基本定理の成り立つことが示された。これらは、可分 LF-多様体に関する体系的な理論の支柱となっている。
近年は非可分 LF-多様体の研究も進展し、LF 空間の開集合において基本定理が成立することが証明され、LF-多様体の部分的な位相的特徴付けも与えられた。しかし、非可分 LF-多様体に関しては、基本定理の成立は未解決であった。LF-多様体の理論を構築する上でも、基本定理の解明と、それを踏まえた完全な位相的特徴付けを与えることが不可欠であった。

(2) 写像空間や冪空間の無限次元多様体性に関する研究

自然に現れる無限次元空間として、写像空間や冪空間を挙げることができる。実際に、無限次元多様体の理論の応用として、ヒルベルト空間やヒルベルト立方体、及びそれらの部分空間をモデルとする可分無限次元多様体が発見されてきた。
しかし、非可分無限次元多様体が自然に現れる例はまだ少ない。そこで、非可分無限次元多様体の有用な位相的特徴付けと、それを利用して、写像空間や冪空間から具体例を見つけることが求められていた。
また、写像空間や冪空間の位相構造の解明が進めば、例えば PL 写像や Lipschitz 写像といった、ある性質を持つ連続写像のなす空間が連続写像空間に位相的にどのように埋蔵されているかが理解されるようになる。その研究成果は、関数解析学等の他分野への応用展開も期待されていた。

研究代表者は、一般及び幾何学的トポロジーを土台として、非可分の場合も含む無限次元多様体について研究してきた。その成果として、非可分ヒルベルト空間の標準正規直交基底で張られる部分空間や、それとヒルベルト立方体との積空間をモデルとする多様体に、ある有用な位相的特徴付けを与えた。さらに、この特徴付けを用いて具体的な空間の無限次元多様体性を調べ、特に局所凸線型完備距離空間の、非可分、可算局所コンパクト凸集合の位相型を決定した。

２．研究の目的

本研究の目的は、非可分無限次元多様体の位相的性質を解明するとともに、その応用として写像空間や冪空間から具体例を見出すことで、その理論をより充実させていくことであった。

(1) LF-多様体に関する研究

非可分 LF-多様体に関する単体分割定理（E-多様体 M と M×P が同相となるような多面体 P が存在する）と開埋蔵定理（E-多様体が E に開集合として埋蔵される）を証明し、理論の構築を目指す。

(2) 写像空間や冪空間の無限次元多様体性に関する研究

① 冪空間に関する研究

距離付け可能空間に対して、そのコンパクト部分集合からなる冪空間が非可算稠密度 κ を持つヒルベルト空間$\ell_2(\kappa)$と、有限部分集合からなる冪空間が$\ell_2(\kappa)$の標準正規直交基底で張られる部分空間$\ell_2^f(\kappa)$と、各々同相になる条件を与える。さらに、それらの位相的な包含関係を明らかにする。

② 写像空間に関する研究

多面体上の連続写像空間の部分空間として現れる PL 写像のなす空間が非可算稠密度κを持つ$\ell_2^f(\kappa)$と同相になることと、Lipschitz 写像のなす空間が$\ell_2^f(\kappa)$とヒルベルト立方体 Q の積空間$\ell_2^f(\kappa)\times Q$ と同相になることを証明する。そして、それらの連続写像空間への位相的な埋め込まれ方を調べる。

３．研究の方法

研究予算を主に、研究集会への参加のための旅費や、書籍の購入に費やした。関連分野の

研究発表や、文献から得られたアイデアを元に研究を進めていった。

(1) LF-多様体に関する研究

非可分 LF 空間は非可分ヒルベルト空間$\ell^2(\kappa)$とユークリッド空間の増大列の帰納極限$\mathbb{R}^\infty$の積空間$\ell^2(\kappa)\times\mathbb{R}^\infty$か、または非可分ヒルベルト空間からなる狭義増大列の帰納極限$\Sigma\ell^2(\kappa_n)$に分類される。また、LF-多様体の単体分割定理と開埋蔵定理は、同値の命題であることが証明されている。ここで、$\mathbb{R}^\infty$-多様体は可分 LF-多様体であり、単体分割定理、開埋蔵定理、そしてこれらと同値の定理である安定性定理（E-多様体 M と M×E が同相となる)、及びホモトピー分類定理（2 つの E-多様体がホモトピー同値ならば、それらは同相である）が成り立つ。これらの定理群は、$\ell^2(\kappa)$-多様体に関しても成立し、かつ同値であることが知られている。そこで本研究では、効果的に研究を進めるためにも、まず($\ell^2(\kappa)\times\mathbb{R}^\infty$)-多様体に関して上記の定理群を考察し、次にその成果を活かして$\Sigma\ell^2(\kappa_n)$-多様体について検討することにした。
実際に、パラコンパクト空間が持つ局所的性質の大域的拡張性に着目し、一般及び幾何学的トポロジーによる技法を用いて研究を行った。

(2) 写像空間や冪空間の無限次元多様体性に関する研究

写像空間や冪空間がヒルベルト空間やその部分空間と同相になることを示すために、H. Torunczyk による$\ell^2(\kappa)$-多様体の位相的特徴付けや、研究代表者による$\ell_2^f(\kappa)$-多様体と($\ell_2^f(\kappa)\times Q$)-多様体の位相的特徴付けを適用した。

① 冪空間に関する研究

D.W. Curtis や N.T. Nhu らの研究によって、可分距離付け可能空間のコンパクト部分集合のなす冪空間が可算稠密度 ω を持つヒルベルト空間$\ell_2(\omega)$と、有限部分集合のなす冪空間が$\ell_2(\omega)$の標準正規直交基底で張られる部分空間$\ell_2^f(\omega)$と、それぞれ同相になるための同値条件が与えられていた。この結果に関して、非可分の場合への一般化を行った。

② 写像空間に関する研究

K. Sakai や R.Y. Wong による先行研究では、コンパクト多面体上の PL 写像と Lipschitz 写像のなす空間の位相型が、各々$\ell_2^f(\omega)$と($\ell_2^f(\omega)\times Q$)になることが証明された。これをより一般の多面体上で考察することで、非可分の場合への拡張を図った。

4．研究成果

(1) LF-多様体に関する研究

非可分 LF-多様体の研究においては、特筆すべき結果は得られなかった。しかし、$\ell^2(\kappa)\times\mathbb{R}^\infty$をモデルとする多様体については、いくつかの先行研究から得たアイデアがあるので、それを元に引き続き研究を進めていき、基本定理の証明を目指していきたい。

(2) 写像空間や冪空間の無限次元多様体性に関する研究

① 冪空間に関する研究

当初の目標であった、位相空間の種々の部分集合からなる冪空間から非可分無限次元多様体を見つけ出す研究については、大きな成果を上げることができた。実際に、距離付け可能空間 X の空でないコンパクト部分集合のなす冪空間に Vietoris 位相を導入した Comp(X)と、空でない有限部分集合からなる冪空間 Fin(X)を中心に、その位相型に関する研究を行った。
非可算の場合も含む一般の濃度 κ に対して、Comp(X)が$\ell_2(\kappa)$と同相になるための X の位相的特徴付けとして、連結、局所連結、完備距離付け可能であり、各点でコンパクト近傍を持たず、かつ任意の空でない開集合が稠密度 κ を持つという条件を得た（雑誌論文②,③)。
Fin(X)については、$\ell_2^f(\kappa)$と同相であるための同値条件が、X が連結、局所道連結、可算局所コンパクト、強可算次元距離付け可能空間で、その空でない開集合の稠密度が κ に等しいということを証明した（雑誌論文①,③)。
また、X とその完備化 Y に対して、冪空間組(Comp(Y),Fin(X))が空間組($\ell_2(\kappa)$, $\ell_2^f(\kappa)$)と同相になるための必要十分条件が、その剰余 Y＼X の局所的不分割性で与えられることを示した（雑誌論文②,③)。これにより、Comp(Y)と Fin(X)の位相的包含関係が明らかになった。
さらに、距離付け可能空間の空でない連結なコンパクト部分集合からなる冪空間が（非可分の場合も含む）ヒルベルト空間と同相になるための必要十分条件も調べ、それがコンパクト部分集合の場合と同じであることを証明した。
以上より、Vietoris 位相のもとでの、距離付け可能空間のコンパクト部分集合からなる冪空間及びその部分空間の位相型に関する研究に、一応の完成を与えることができた。
さらに、本研究を通じて培った技法は、今後非可分無限次元多様体とその周辺の分野の研究へ応用されることが期待される。
これらの結果をまとめた論文が、国際学術雑誌に掲載された。また、国内外の学会、国際

会議、研究集会において、その研究成果を発表した。

② 写像空間に関する研究

位相空間上の連続写像からなる空間とその部分空間に一様収束位相を導入して、その位相構造を研究した。
A. Yamashita による先行研究から、コンパクトでない局所コンパクト可分距離空間上の実数値連続関数のなす空間は、非可分ヒルベルト空間$\ell^2(2^\omega)$と同相になることが示される。この結果を受けて、その部分空間である局所 Lipschitz 関数（または、種々の条件を加えた関数）からなる空間が、$\ell^2(2^\omega)\times Q$ と同相になると予想を立て、考察を重ねた。研究期間中論文としてまとまるような結果までには至らなかったものの、Lipschitz 関数についての先行研究から多くの知見を得ることができたので、今後の研究に活かしていきたい。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Katsuhisa Koshino, Hyperspaces of finite subsets, homeomorphic to pre-Hilbert spaces, Topology and its Applications, 査読有, 210 巻, 2016, 133-143.
DOI:10.1016/j.topol.2016.07.013

② Katsuhisa Koshino, On a hyperspace of compact subsets which is homeomorphic to a non-separable Hilbert space, Topology and its Applications, 査読有, 206 巻, 2016, 166-170.
DOI:10.1016/j.topol.2016.03.034

③ Katsuhisa Koshino, Topological structures of hyperspaces of compact / finite sets, 京都大学数理解析研究所講究録 RIMS 研究集会報告集, 査読無, 1987 巻, 2016, 54-66.
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1987-09.pdf

〔学会発表〕（計 5 件）

① 越野克久, Topological types of hyperspaces of finite sets in metrizable spaces, 日本数学会 2016 年度春季総合分科会, 2016 年 3 月 17 日, 筑波大学.

② Katsuhisa Koshino, Hyperspaces of compact / finite sets in metrizable spaces, 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 2015 年 11 月 26 日, Min Nan Normal University (China).

③ 越野克久, Topological structures of hyperspaces of compact / finite sets, RIMS 研究集会（集合論的位相幾何学および幾何学的トポロジーの最近の動向と展望）, 2015 年 11 月 18 日, 京都大学.

④ Katsuhisa Koshino, Infinite-dimensional manifolds and hyperspaces of finite subsets, International Conference on Set-Theoretic Topology and its Applications, 2015 年 8 月 24 日, 神奈川大学.

⑤ 越野克久, 有限集合からなる冪空間の位相について, 早稲田幾何学的トポロジーセミナー, 2015 年 6 月 16 日, 早稲田大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

越野 克久（KOSHINO, Katsuhisa）
神奈川大学・工学部・非常勤講師
研究者番号：60749521