

平成 29 年 8 月 22 日現在

機関番号：35302

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2016

課題番号：15K17531

研究課題名(和文) 複雑性1のGKM多様体の基礎理論の構築

研究課題名(英文) Toward the theory of complexity one GKM manifolds

研究代表者

黒木 慎太郎 (Kuroki, Shintaro)

岡山理科大学・理学部・准教授

研究者番号：90433309

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：複雑性1のGKM多様体($2n+2$ 次元の多様体で n 次元のトーラス作用を持つ空間)に関連した結果として次を得た。

4頂点完全グラフ K_4 上のGKM多様体の分類、トーラス作用がいつより大きな次元のトーラス作用へ拡張するかの不変量を構成した、 G_2 型例外リー群と A_2 型のリー群への拡張作用を持つ場合の複雑性1のGKM多様体の分類、擬トーリック多様体がルート系を持つ場合に多面体の J -構成が自然に現れることを示した、トーラスオービフォールドの同変コホモロジーを計算した(Darby, Songと共同)、flaggedボットタワーを定義しそのトポロジーを研究した(Lee, Song, Suhと共同)。

研究成果の概要(英文)：We have obtained the following results about complexity one GKM manifolds: (1) Classification of GKM manifolds over the complete graph with 4-vertices K_4 , (2) Construction of the invariant about an extension of bigger torus actions, (3) Classification of complexity one GKM manifolds with the exceptional Lie group G_2 and A_2 -type Lie group extended actions, (4) Equivariant cohomology ring of torus orbifolds (joint work with Darby and Song), (5) Topology of flagged Bott tower (joint work with Lee, Song Suh).

研究分野：トーリックトポロジー

キーワード：GKM多様体 複雑性1のトーラス作用 群の作用の拡張

1. 研究開始当初の背景

トーリック多様体の一般化に当たる GKM 多様体と呼ばれるクラスがある。このクラスは非常に大きなクラスではあるが、グラフの組み合わせ論を通してその同変な不変量を研究することができる。中でもトーリック多様体の次のクラスに当たると考えられる複雑性 1 のトーラス作用を持つ GKM 多様体に関しては、代数幾何やシンプレクティック幾何においては基礎理論が構築されていて、どのようなデータが複雑性 1 の GKM 多様体を (不変量のみならず幾何的な対象として) 復元するかが分かり、それをもとに研究が進められている。しかしながら、トポロジーから見た基礎理論は満足のいく形で構築されているとは言い難い。

2. 研究の目的

トーリック多様体に関しては Davis-Januszkiewicz の研究以来、トーリックトポロジーという形でトポロジーの側からの基礎理論が構築・整備され、それをもとに活発な研究がおこなわれている。特に Davis-Januszkiewicz が定義した(擬)トーリック多様体は軌道空間と特性関数と呼ばれるアイソトロピー部分群の二つのデータから同変同相型は完全に復元できることが分かっている。本研究では、複雑性 1 の GKM 多様体の基礎的な理論の構築を目標とし、擬トーリック多様体の場合を真似てどのようなデータから複雑性 1 の GKM 多様体は位相的に復元できるのかを探ることを一つの目的として研究を進めた。

3. 研究の方法

最初の年度で、複雑性 1 の GKM 多様体の軌道空間は (例えば局所標準的という良い仮定を置いたとしても) それほど単純な形をしていないわけではないことが分かった。これは、Davis-Januszkiewicz の構成方法をそのまま真似ることができない (真似をしたとしても、そもそもの軌道空間がよくわからないので、いいものが出てこない) ということの意味している。そこで複雑性 1 の GKM 多様体の中でも対象を狭めてどのような空間が現れるのかを (より多くの良い具体例と共に) 探ることに方向転換した。

また、様々な視点からのアイデアを取り入れるためにも、本研究に直接的とは限らないが間接的にかかわる研究も同時に行い、様々な研究集会への参加及び主催を行い他の研究者達との交流を図った。

4. 研究成果

期間中に以下の結果を得た。

(1) 4 頂点完全グラフ上の GKM グラフを分類し、それと対応する幾何的な対象を分類した。結果として 6 次元の複素射影空間と複素二次超曲面のみが 4 頂点完全グラフを GKM グラフとして持つものであることが分かっ

た。つまり、この場合の複雑性 1 の GKM 多様体はこの 2 種類のみ位相型を持つことがわかる。

(2) GKM 多様体上のトーラス作用がどのくらい大きな次元のトーラス作用に拡張するか調べるための新しい不変量 (Group of axial functions と呼んでいる) を構成した。この結果の応用として、複雑性 1 の GKM 多様体がいづつトーリック多様体やもっと一般のトーラス多様体 (2n 次元の GKM 多様体で n 次元のトーラス作用を持つもの) になるかが (大まかに) 判定できる。

(3) 複雑性 1 の GKM 多様体が拡張作用を持つ場合の部分的な分類を行った。拡張作用が推移的になる場合は以前行っているもので、そこに現れる群について以下の二つの結果を得た：

G 型例外リー群を拡張作用として持つ場合は、もしも多様体が単連結であれば、トーラス多様体と 6 次元球面の直積になる。

A2 型リー群を拡張作用として持つ場合は (単連結の仮定を付けずに)、以下のいずれかの位相型を持つことが分かった: (i) 6 次元旗多様体上のトーラス多様体束, (ii) 4 次元複素射影空間上の U(2) 拡張作用をもつトーラス多様体束, (iii) 4 次元複素射影空間上の複雑性 1 の GKM 多様体束, (iv) (iii) でえられる多様体から blow-down を施して得られる 2 種類の多様体。

(4) (擬)トーリック多様体上に空でないルート系 (M. Masuda と共に定義したもの) が存在する場合、その軌道空間は単体と多面体の直積になるか、もしくはある多面体を J-構成 (Bahri-Bendersky-Cohen-Gittler によって導入された wedge operation の一般化) したものと組み合わせ同値になることを示した。これは、J-構成の幾何的な一つの解釈を与えるものである。応用として、以下の二つの事も分かる：

(擬)トーリック多様体が拡張作用を持つこととルート系を持つことが同値である。

(擬)トーリック多様体上の拡張作用は全て Moment-angle 多様体上の拡張作用に持ちあがる。つまり、(擬)トーリック多様体上の拡張作用は全て Moment-angle 多様体上の拡張作用から誘導される (これは以前、余次元 1 の軌道を持つ場合の拡張作用に関して得ていた結果の一般化になる)。

(5) トーラスオービフォールド (トーラス多様体のオービフォールドへの拡張) の整数係数の同変コホモロジー環構造を、トーラスオービフォールドが manifold with faces (多面体の一般化) の Davis-Januszkiewicz 構成から得ることができかつ奇数次数のコホモロジーが消えている場合に対して与えた。これは、Masuda-Panov のトーラス多様体上の同変コホモロジー環の計算や、Bahri-Sarkar-Song のトーリックオービフォールド上の整数係数同変コホモロジー環の計算の一般化になっている。(A. Darby,

J.B.Song との共同研究)

(6) 以前 D.Y.Suh との共同研究で行っていた, 複素射影タワーの研究からの派生として, flagged ポットタワーと呼ばれる旗多様体のバンドルのタワーを定義して, そのトポロジーを研究した。(E.Lee, J.B.Song, D.Y.Suh との共同研究)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

(1) S.Kuroki, Root systems and symmetries of a torus manifold, Transformation Groups, 査読有, Volume 22, 2017, 453--474.

DOI:10.1007/s00031-016-9387-4

(2) S.Kuroki, Flagified Bott manifolds and their maximal torus actions, 数理解析研究所講究録, 査読無し, 2016, 2017, 154-160.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2016-06.pdf>

(3) S.Kuroki and Z.Lu, Projective bundles over small covers and the bundle triviality problem, Forum Math, 査読有, Volume 28, 2016, 761--781.

DOI: 10.1515/forum-2015-0007

(4) S.Kuroki, An Orlik-Raymond type classification of simply connected 6-dimensional torus manifolds with vanishing odd degree cohomology, Pacific Journal of Math, 査読有, 280, 2016, 89--114.

DOI:10.2140/pjm.2016.280.89

(5) S.Kuroki, Classification of effective GKM graphs with combinatorial type K_4 , 岡山理科大学紀要 A 自然科学, 査読無し, 52, 2016, 7-15.

(6) S.Kuroki, A remark on torus graph with root systems of type A, 数理解析研究所講究録, 査読無し, 1968, 2015, 55-58.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1968-09.pdf>

[学会発表] (計 15 件)

黒木慎太郎, A partial classification of complexity one GKM manifolds with large symmetries, Group actions and topology, 2016 年 12 月 5 日, 城崎福祉会館.

黒木慎太郎, Cohomological non-rigidity of eight-dimensional complex projective

towers, 2016 年日本数学会秋季総合分科会, 2016 年 9 月 17 日, 関西大学.

黒木慎太郎, Flagified Bott manifolds and their maximal torus actions, 新しい変換群論とその周辺, 2016 年 5 月 24 日, 数理解析研究所.

S.Kuroki, A remark on root systems and J-constructions of quasitoric manifolds, Toric Topology 2016 in Kagoshima, 2016 年 4 月 21 日, 鹿児島大学.

黒木慎太郎, Upper bounds for the dimension of tori acting on GKM manifolds, 福岡大学トポロジーセミナー, 2015 年 12 月 7 日, 福岡大学.

S.Kuroki, On a maximal torus which acts on a GKM-manifold, Foliations and Groups of Diffeomorphisms 2015, 2015 年 10 月 30 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.

S.Kuroki, On a maximal torus which acts on a GKM-manifold, International conference «Toric Topology, Number Theory and Applications», 2015 年 9 月 8 日, Pacific National University (ロシア).

S.Kuroki, On a maximal dimension of the torus which acts on a GKM-manifold effectively, Combinatorial Constructions in Topology, 2015 年 8 月 20 日, University of Regina (カナダ).

S.Kuroki, An obstruction to the extension of a torus action on a GKM manifold, Glances at Manifolds, 2015 年 7 月 19 日, the Jagiellonian University (ポーランド).

黒木慎太郎, トーリックトポロジーからの話題, 小研究集会「無限群と幾何の周辺」, 2015 年 7 月 11 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.

黒木慎太郎, The root system of torus graphs, 幾何セミナー, 2015 年 7 月 9 日, 明治大学.

S.Kuroki, On extended actions of complexity one torus manifolds, Toric Topology 2015 in Osaka, 2015 年 6 月 19 日, 大阪市立大学.

黒木慎太郎, Root systems and symmetries of torus manifolds, 組み合わせ論と幾何に現れる代数構造, 2015 年 6 月 12 日, 数理解析研究所.

S.Kuroki, A remark on torus graphs with

root systems, 新しい変換群論の幾何, 2015年5月26日, 数理解析研究所.

S.Kuroki, On a classification of low dimensional torus manifolds, 首都大学東京幾何セミナー, 2015年5月22日, 首都大学東京.

〔その他〕

ホームページ等

<https://www.xmath.ous.ac.jp/~kuroki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

黒木 慎太郎 (KUROKI SHINTARO)

岡山理科大学・理学部応用数学科・准教授

研究者番号：90433309

(2) 研究分担者

なし