

令和元年6月18日現在

機関番号：13301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17532

研究課題名(和文) 曲面結び目と2次元ブレイド

研究課題名(英文) Surface-knots and 2-dimensional braids

研究代表者

中村 伊南沙 (Nakamura, Inasa)

金沢大学・電子情報通信学系・准教授

研究者番号：60568161

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：4次元空間内の曲面結び目について、特に曲面結び目の分岐被覆の形をしている「分岐被覆曲面結び目」(曲面結び目上の2次元ブレイド)について研究した。分岐被覆曲面結び目があるとき、それにチャートループ付き1-ハンドルを加えるという操作によって、ある「単純化」を考えることができ、「単純化数」という不変量が定義されることを示した。さらに単純化数について、上からの評価についての研究結果をいくつか得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

新しい不変量である「単純化数」を導入し、上からの評価という点において、その性質をいくらか明らかにすることができた。また、分岐被覆曲面結び目は曲面図式上に描かれるある種のグラフ「曲面図式上のチャート」で表されるが、単純化数の評価を得る過程において、「チャート付き曲面図式」の変形方法を発展させることができた。この変形方法の発展により、分岐被覆曲面結び目の図式を用いた扱いにおいて、従来より複雑な変形を用いる研究が可能になった。

研究成果の概要(英文)：I studied surface-knots in a 4-dimensional space, in particular “branched covering surface-knots” (2-dimensional braids over a surface-knot). I showed that a branched covering surface-knot can be deformed to a “simplified form” by an addition of 1-handles with chart loops, and I defined an invariant called the simplifying number. Further I obtained several upper bounds of simplifying numbers.

研究分野：位相幾何学

キーワード：曲面結び目 2次元ブレイド チャート 結び目

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

曲面結び目とは、4次元空間内に埋め込まれた閉曲面のことである。分岐被覆曲面結び目は、底をなしている曲面結び目上に描かれるある種の有限グラフ「チャート」で表される。研究開始当初は、分岐被覆曲面結び目(曲面結び目上の2次元ブレイド)の図式を用いた表示方法「曲面図式上のチャート表示」と、その同値変形である「チャート付き曲面図式のローズマンムーブ」という、曲面図式のローズマンムーブの拡張になっている局所変形を報告者が導入したところで、「曲面図式上のチャート表示」を用いた図式の変形に関する研究は進んでいなかった。

2. 研究の目的

4次元空間内に標準的に埋め込まれたトーラスの被覆の形をしている「トーラス被覆結び目」と、その拡張である「曲面結び目上の2次元ブレイド」について、これらの曲面結び目を図式を用いて研究したり、その不変量、具体的には特に結び目群やカンドルコサイクル不変量などの性質を明らかにし、さらには2次元ブレイドの概念の拡張や、曲面結び目の新しい研究手法を模索することが本研究の目的であった。

3. 研究の方法

「曲面図式上のチャート表示」を用いた「曲面結び目上の2次元ブレイド」を表示方法、及びその同値な局所変形「チャート付き曲面図式のローズマンムーブ」を用いて、「曲面結び目上の2次元ブレイド」の性質を研究した。また、結び目群の表示やカンドルコサイクル不変量などを用いて、トーラス被覆結び目や曲面結び目上の2次元ブレイドの不変量の表示を求めようとした。

4. 研究成果

結び目群やカンドルコサイクル不変量についての成果は挙げられなかったが、図式を用いた研究について以下の結果を得た。

用語の問題としては、「曲面結び目上の2次元ブレイド」は境界を持たないが、通常の2次元ブレイドは境界を持つため、「曲面結び目上の2次元ブレイド」を「分岐被覆曲面結び目」に変更することにした。

分岐被覆曲面結び目は、曲面結び目上に描かれるグラフ「チャート」で表される。分岐被覆曲面結び目があるとき、それにチャートループ付き1-ハンドルをいくつか付加する操作を行うと、1-ハンドル上のチャートループと、両端点が1価頂点(黒い頂点)である辺「フリー・エッジ」以外のチャートを消去して、チャートを「単純な」形に変形することができることを示した。

この「単純化」に必要な1-ハンドルの数の最小値として「単純化数」という不変量を定義し、単純化数の上からの評価を得た。さらに、この結果を基にして「単純化数」およびそれと類似の方法で定義される「弱い意味での単純化数」の評価の研究を進め、以下の3点について研究結果を得た。

(1) 分岐被覆曲面結び目の単純化について、「単純化数」と「弱い意味での単純化数」の新しい上からの評価をいくつか与え、最初の結果よりもさらに進んだ「単純化の形」に変形できることを示した。チャートの同値変形C-ムーブの中で、白い頂点が4個関わっているCI-M4ムーブと呼ばれる変形を用いることがキーとなった。

(2) 分岐被覆曲面結び目はブランチ点を持たない場合もあるが、分岐被覆曲面結び目が実際ブランチ点を持つ場合、言い換えれば分岐被覆曲面結び目を表すチャートが黒い頂点を持つという、特別な場合について考察し、単純化数の上からの評価を与えた。黒い頂点をもつことにより、(1)よりよい評価を得ることができ、証明もより簡潔になった。

(3) 次数が3の分岐被覆曲面結び目の単純化数は3未満であることを示した。さらに、次数が3でチャートが黒い頂点を持つ場合、つまり分岐被覆がブランチ点を持つ場合、単純化数は1以下であることを示した。次数が3の場合、チャートは4価頂点である交差点を持たないことを利用して、1-ハンドルを用いた変形方法を発展させることで示すことができた。

また、トーラス被覆結び目や2次元ブレイドは1次元の結び目やブレイドの時間変化を表すと考えることができるが、それと関連する対象として、部分的マッチングというある種のグラフについて、その格子上の表示方法を提案し、部分的マッチングが2つあったとき、それらを結ぶ変形方法の面積という概念を導入して、その変形方法の面積が最小になる場合について考察した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Inasa Nakamura, Transformations of partial matchings, Kyungpook Mathematical Journal 掲載予定, 査読有
- ② Inasa Nakamura, Branched covering surface-knots with degree three have the simplifying numbers less than three, Topology and its Applications, 査読有, 256 巻, 2019, 26-45
DOI: 10.1016/j.topol.2019.01.011
- ③ Inasa Nakamura, Simplifying branched covering surface-knots by an addition of 1-handles with chart loops, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 査読有, 27 巻, 2018, Article ID 1850031, 29 p.
DOI:10.1142/S0218216518500311
- ④ Inasa Nakamura, Simplifying branched covering surface-knots by chart moves involving black vertices, Illinois Journal of Mathematics, 査読有, 61 巻, 2017, no. 3-4, 497-515.
<https://projecteuclid.org/euclid.ijm/1534924837>
- ⑤ Inasa Nakamura, On addition of 1-handles with chart loops to 2-dimensional braids, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 査読有, 25 巻, 2016, Article ID 1650061, 32 p.
DOI:10.1142/S0218216516500619

[学会発表] (計 21 件)

- ① 中村伊南沙, Transformations of partial matchings, 葉層構造と微分同相群 2018 研究集会 Foliations and Diffeomorphism Groups 2018 (国際会議), 2018 年 10 月 22 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬県沼田市)
- ② 中村伊南沙, ブランチ点をもつ分岐被覆曲面結び目の単純化数, 日本数学会秋季総合分科会・トポロジー分科会一般講演, 2018 年 9 月 24 日, 岡山大学 (岡山県岡山市)
- ③ 中村伊南沙, Simplifying numbers of branched covering surface-knots, Four Dimensional Topology (国際会議, 招待講演), 2018 年 9 月 9 日, 大阪市立大学 (大阪府大阪市)
- ④ 中村伊南沙, 分岐被覆曲面結び目の単純化数の評価, 玉原トポロジー・幾何セミナー2018, 2018 年 8 月 26 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬県沼田市)
- ⑤ 中村伊南沙, 分岐被覆曲面結び目、特にトール被覆結び目について, 数理学談話会, 2018 年 6 月 20 日, 金沢大学 (石川県金沢市)
- ⑥ 中村伊南沙, Simplifying branched covering surface-knots by chart moves involving black vertices, 第 4 1 回伊豆トポロジーセミナー, 2018 年 3 月 22 日, ホテル伊東ガーデン (静岡県伊東市)
- ⑦ 中村伊南沙, Simplifying branched covering surface-knots by chart moves involving black vertices, The 13th East Asian School of Knots and Related Topic (国際会議, 招待講演), 2018 年 1 月 31 日, Daejeon (韓国)
- ⑧ 中村伊南沙, 曲面結び目のチャート表示について, 琵琶湖特異点論ワークショップ, 2017 年 12 月 21 日, ビューロッジ琵琶 (滋賀県大津市)
- ⑨ 中村伊南沙, Simplifying covering surface-knots by an addition of 1-handles with chart loops, 葉層構造と微分同相群 2017 研究集会, 2017 年 10 月 26 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬県沼田市)
- ⑩ 中村伊南沙, Simplifying covering surface-knots by an addition of 1-handles with chart loops (招待講演), ハンドル体結び目とその周辺 10・Hurwitz action 7, 2017 年 10 月 8 日, 筑波大学 (茨城県つくば市)
- ⑪ 中村伊南沙, 1-ハンドル付加による被覆曲面結び目の単純化, 日本数学会秋季総合分科会・トポロジー分科会一般講演, 2017 年 9 月 11 日, 山形大学 (山形県山形市)
- ⑫ 中村伊南沙, 被覆曲面結び目のチャートループ付き 1-ハンドル付加による単純化, 玉原トポロジー・幾何セミナー, 2017 年 7 月 31 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬県沼田市)
- ⑬ 中村伊南沙, Simplifying covering surface-knots by an addition of 1-handles with chart

loops, The 12th East Asian School of Knots and Related Topics (国際会議), 2017年2月13日, 東京大学(東京都目黒区)

- ⑭ 中村伊南沙, Unbraiding 2-dimensional braids by an addition of 1-handles with chart loops, 4次元トポロジー, 2016年11月26日, 大阪市立大学(大阪府大阪市)
- ⑮ 中村伊南沙, Showing distinctness of surface links by taking 2-dimensional braids, 葉層構造と微分同相群 2016 研究集会, 2016年10月20日, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市)
- ⑯ 中村伊南沙, 1-ハンドル付加による2次元ブレイドのブレイド解消操作, 日本数学会秋季総合分科会・トポロジー分科会一般講演, 2016年9月18日, 関西大学(大阪府吹田市)
- ⑰ 中村伊南沙, Unbraiding 2-dimensional braids by an addition of 1-handles with chart loops, KOOK-TAPU Workshop of Knots in Tsushima Island (国際会議), 2016年9月8日, 対馬交流センター(長崎県対馬市)
- ⑱ 中村伊南沙, On addition of 1-handles with chart loops to 2-dimensional braids, 第39回トポロジーセミナー, 2016年3月22日, ホテル伊東ガーデン(静岡県伊東市)
- ⑲ 中村伊南沙, On addition of 1-handles with chart loops to 2-dimensional braids, The 11th East Asian School of Knots and Related Topics (国際会議), 2016年1月26日, 大阪市立大学(大阪府大阪市)
- ⑳ 中村伊南沙, 曲面絡み目上の2次元ブレイド, 数学協働プログラム「生命ダイナミクスの数理とその応用: 理論からのさらなる深化」(ポスター発表), 2015年12月10日, 東京大学(東京都目黒区)
- ㉑ 中村伊南沙, チャート付き1-ハンドルを付加して得られる2次元ブレイド, 日本数学会秋季総合分科会・トポロジー分科会一般講演, 2015年9月13日, 京都産業大学(京都府京都市)

[図書] (計 0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0件)

○取得状況 (計 0件)

[その他]

ホームページ等

金沢大学理工研究域電子情報通信学系 中村伊南沙研究室ホームページ

<http://inasa.w3.kanazawa-u.ac.jp>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

なし

(2) 研究協力者

なし

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。