科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　６ 月　５ 日現在

機関番号：１２７０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2019
課題番号：１５Ｋ１７５３４

研究課題名（和文）群の相対的双曲構造

研究課題名（英文）Relatively hyperbolic structures of groups

研究代表者
山形　紗恵子（Yamagagta, Saeko）

横浜国立大学・教育学部・准教授

研究者番号：７０５１３５６３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：可算とは限らない群 G の，部分群からなる族を 2 つとり，H と K とおく．ただし，K の任意の元に対し，それを含む H の元が必ず存在しているとする．
本研究で，群 G が H に関して相対的双曲性をもつことと，群 G が K に関して相対的双曲性をもつことが同値となるための H と K に関する条件を与えた．また，群 G が H に関して相対的双曲性をもち，さらに，群 G が K に関しても相対的双曲性をもつとき，G の部分群 L が H に関して相対的に擬凸であることと L が K に関して相対的に擬凸であることの関係性を考察した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
相対的双曲性をもつ群に関するこれまでの世界的な研究の流れとしては，1つの相対的双曲構造（RHS）に着目して，その群の性質を調べるというものが大部分であった．また，グロモフの双曲群に対して成り立つ定理が，相対的双曲性をもつ群に対しても一般化できるか，という方針の下での結果が大部分であった．
そんな中，「与えられた群に対し，その群のRHS全体に着目する.」「部分群の包含関係から決まる自然な半順序を，その群のRHS全体からなる集合に入れる.」という着想に基づく本研究は，相対的双曲性をもつ群に対し，グロモフの双曲群の単なる一般化を超えた新しい意味づけを与えている．

研究成果の概要（英文）：Let G be a group which is not necessarily countable. Let H and K be two families of subgroups of G. Assume that each subgroup which belongs to K is contained in some subgroup which belongs to H.
In this research, we discuss relations of relative hyperbolicity for the group G with respect to the two families H and K, respectively. If the group G is hyperbolic relative to H and K, respectively, then we consider relations of relative quasiconvexity for a subgroup L of the group G with respect to H and K, respectively.

研究分野：幾何学的群論

キーワード：相対的双曲群　相対的擬凸部分群　相対的双曲構造　普遍相対的双曲構造

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1) 本研究課題の申請時における背景

相対的双曲性をもつ群に関する世界的な研究の流れとしては，1つの相対的双曲構造に着目して，その群の性質を調べるというものが大部分であった．また，Gromov の双曲群に対して成り立っている定理が，相対的双曲性をもつ群に対しても成り立つように一般化できるか，という方針の下での結果が大部分であった．

ここで，Gromov と Farb による，相対的双曲性をもつ有限生成群の定義（G-F の定義とよぶ）を大ざっぱに述べる．有限生成群を G，その部分群を H_1，H_2,⋯，H_n とする．群 G のケーリーグラフにおいて，各 i に対し，H_i の各（左）剰余類に対応する部分グラフをそれぞれ1点につぶす．このようにして得られたグラフが負曲率であり，さらにそのグラフがあるテクニカルな条件を満たすとき，G は（ $\{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ に関して）相対的双曲性をもつという．また，$\{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ のことを G の相対的双曲構造 (RHS: relatively hyperbolic structure) とよぶ．この定義より，どんな有限生成群 G も $\{G\}$ に関して相対的双曲性をもつ．有限生成とは限らない群に対しては，デーン関数という群の表示から決まる関数を用いて，Osin が相対的双曲性の定義をしている．この定義は，有限生成群に限ると，G-F の定義と同値であることを Osin が証明している．

ところで一般に，与えられた群に対して，RHS は1つとは限らない．実際，論文[1]で多くの有限生成群は RHS を可算無限個もつことを示した．また，論文[1]で群 G の部分群の間の包含関係から決まる，自然な半順序を G の RHS 全体からなる集合に入れ，与えられた RHS がその半順序に関して最大元（普遍相対的双曲構造（URHS: universal relatively hyperbolic structure）と名付けた）であるかどうかの判定法を与えた．さらに，論文[1]において，与えられた群の任意の部分群の集合が，その群の RHS となるための必要十分条件も与えた．URHS の定義により，Gromov の双曲群は $\{\emptyset\}$ が URHS である．

(2) 本研究課題の申請時における動機

研究代表者は，調べたい（無限離散）群が「うまく」作用するような空間を構成（もしくは既知の空間を利用）し，その作用を調べるという幾何学的な手法により，様々な群の代数的な性質の解明を目指し，研究を続けてきた．本研究においても，幾何学的な手法により，相対的双曲性をもつ群，特に URHS をもつ群の代数的な性質を明らかにしていきたいと考えた．

ところで，Drutu-Sapir による，URHS をもつ，有限生成とは限らない群の，融合積などへの分解定理が存在する．これは群の代数的な構造を調べる上で，非常に基本的かつ強力な定理である．しかし，どのような群が URHS をもつのかということについては，先ほどあげた Gromov の双曲群など，定義から従う自明な例を除いてはあまり解明されていない．従って，この分解定理が十分応用されていないのが現状であった．そこで，研究代表者らは，RHS 全体からなる集合の半順序を用いることによって，URHS をもつための必要十分条件を与えようと考えた．

この必要十分条件が与えられると，Drutu-Sapir の結果を積極的に利用できる状況が整う．それにより，相対的双曲性をもつ群がどのように分解されるかという，基本的かつ重要な群の代数的構造の解明につながると予想した．

２．研究の目的

本研究の目的は大きく分けて2つあった．

(1) 「ある種のグラフを用いて，有限生成とは限らない群に対し，相対的双曲性を定義すること」

G-F の定義における群のケーリーグラフから作られるグラフには，その群がうまく（左から）作用する．よって，この定義は幾何学的手法による研究とはなじみがよい．しかし，Osin による定義には群作用が全く出てこないので，幾何学的手法による研究とあまりなじみがよいとは言えない．従って，Osin の定義と同値になるように，有限生成とは限らない群に対して，G-F の定義を拡張する．

(2) 「上記(1)を用いて，有限生成とは限らない群が URHS をもつための必要十分条件を与えること」

有限表示ではない，有限生成群において，URHS をもたない群の実例が知られている．また，有限表示群においては，URHS をもたない群はいまのところ知られていない．さらに，「有限表示群ならば，URHS をもつ」と予想しているので，まずはこのことを示す．その後で有限生成群，最終的には有限生成とは限らない群，というように段階を踏んでそれらの群が URHS をもつための必要十分条件を与えることを目指す．

３．研究の方法

(1) 「ある種のグラフを用いて，有限生成とは限らない群に対し，相対的双曲性を定義す

ること」

G-F の定義で用いている，ある種のグラフとテクニカルな条件は，有限生成とは限らない群に対しても，そのまま適用できるのでそのまま使う．しかし，それだけでは Osin による定義と同値にはならない．その理由は，次にあげる Osin の定理にあるような，「非自明なリレーションに関係する部分群は有限個」という性質が得られないからである．また，この性質さえ定義に取り込むことができれば，目的は達成されると考えた．

ここで，Osin による定理をかく．『有限生成とは限らない群 G が部分群の集合 $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に関して（Osin による定義の意味で）相対的双曲性をもつとする．ここで Λ は可算集合とは限らない．このとき，G は（必要ならば H_λ たちの順番を入れかえることにより）$G=<H_1,H_2,\cdots,H_n>*(*_{\lambda\in\Lambda\setminus\{1,2,\ldots,n\}}H_\lambda)$ と自由積に分解される（$<H_1,H_2,\cdots,H_n>$ は H_1，H_2，…，H_n の元で生成される G の部分群）．』

この定理により，G において，リレーション r を１つ任意にとり，それが１つの H_λ に属する文字からなる語ではない場合（このとき r を非自明なリレーションとよぶことにする）には，r は H_1，H_2，…，H_n の中の 2 つ以上に属する文字からなる語であることが分かる．(G-F の定義では，Λ は有限集合なので,上記のことは自然に成り立っている．)

このことを G-F の定義に用いられる，ある種のグラフ上の性質に置きかえる．群 G の非自明なリレーション r はこのグラフ上のループ R として現れる．また r に含まれる文字は，R に含まれる辺のラベルに対応する．さらに R に含まれる各辺のラベルは，H_1，H_2，…，H_n のいずれかである，ということに置きかえられる．この置きかえを取り込めば，(1)の目的は達成される．

(2) 「上記(1)を用いて，有限生成とは限らない群が URHS をもつための必要十分条件を与えること」

上記(1)であげた Osin による定理は，確かに群 G の（自由積）分解を与えている．しかし，研究代表者らが目指すのは，RHS に含まれる部分群を用いては，それ以上「分解できない」という意味で一意的な，群の分解定理を得ることである．例えば Osin の定理では，ある $\lambda_0\in\Lambda\setminus\{1,2,\cdots,n\}$ に対して，$H_{\lambda_0}=K_1*K_2$ というように，さらに自由積に分解される H_{λ_0} があっても構わない．また，$\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\lambda_0\}}\cup\{K_1,K_2\}$ も G の RHS であるので，Osin の定理における分解は一意的ではない．

まずは有限表示群，次に有限生成群，最後に有限生成とは限らない群，というように段階を踏んで，URHS をもつための必要十分条件を得ることを目指す．

各段階で共通して使えると予想しているアイデアは以下である．群 G の RHS 全体からなる集合の半順序と，G が作用する空間に関する論文[2]の結果を用いる．

群 G の RHS を H，K とし，$H\rightarrow K$ という順序がついているとする．このとき,論文[2]では,RHS H に関するある条件を満たしながら，G が作用する空間 X と，RHS K に関するある条件を満たしながら，G が作用する空間 Y が存在し，X から Y への全射 G -同変写像が存在することを示した．つまり，RHS の間の半順序と，作用する空間の間の全射がきちんと対応しているのである．従って,論文[1]で得た，RHS の間の半順序に関する結果を用いながら，RHS の半順序を調べる代わりに，論文[2]での，上で述べた空間への群作用を調べる．これにより，URHS をもつための必要十分条件を与えることが出来ると予想した．

４．研究成果

研究の目的欄にある(1)は達成することができた．具体的には，ある種のグラフを用いて，有限生成とは限らない群に対し，相対的双曲性を定義することが出来た．さらにその定義をもちいて，次の①，②の研究成果を得た．

① 可算とは限らない群 G の，部分群たちからなる族を 2 つとり，H と K とおく．(つまり，H と K の元は G の部分群である．) ただし，K の任意の元に対し，それを含む H の元が必ず存在しているとする．すなわち，A を K の元とすると，それは G の部分群であり，A を含む G の部分群 B であって，B は H の元であるようなものが存在しているとする．
このとき群 G が H に関して相対的双曲性をもつことと，G が K に関して相対的双曲性をもつことが同値となるための H と K に関する条件を与えた．より詳しくは，G が K に関して相対的双曲性をもつとき，H の元に関していくつかの条件をつけることによって，G は H に関しても相対的双曲性をもつことを明らかにした．反対に，G が H に関して相対的双曲性をもつとき，H の任意の元は K のある部分集合に関して相対的双曲性をもち，さらに H の有限個を除く任意の元が K のある元たちの自由積に分解されるならば，G は K に関しても相対的双曲性をもつことを証明した．

② 群 G が H に関して相対的双曲性をもち，さらに，G が K に関しても相対的双曲性をもつとき，G の部分群 L が H に関して相対的に擬凸であることと L が K に関して相対的に擬凸であることの関係性を考察した．

しかし，研究の目的欄にある(2)を達成することは出来なかった．ただ，

- 与えられた群に対し，1つの RHS ではなく，その群の RHS 全体に着目する．
- 部分群の包含関係から決まる自然な半順序を，その群の RHS 全体からなる集合に入れる．
- さらにその半順序での最大元（URHS）に着目する．

という着想は，相対的双曲性をもつ群に関する研究において，これまで見られなかったものである．それだけではなく，その着想から，論文[1]や上記①，②のような，いくつもの有益な結果も実際に得ている．また，この着想に基づく研究は，相対的双曲性をもつ群に対し，Gromov の双曲群の単なる一般化を超えた新しい意味づけを与えたという意味でも価値のある研究であり，今後更なる発展が期待される．

<引用文献>

[1] Yoshifumi Matsuda, Shin-ichi Oguni, Saeko Yamagata,
The universal relatively hyperbolic structure on a group and relative quasiconvexity for subgroups,
Analysis and geometry of discrete groups and hyperbolic spaces, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B48, 73-93, 2014年

[2] Yoshifumi Matsuda, Shin-ichi Oguni, Saeko Yamagata,
Blowing up and down compacta with geometrically finite convergence actions of a group, preprint, arXiv:1201.6104v3

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 MATSUDA Yoshifumi、OGUNI Shin-ichi、YAMAGATA Saeko	４．巻 42
２．論文標題 On Relative Hyperbolicity for a Group and Relative Quasiconvexity for a Subgroup	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 83～112
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179263	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Yoshifumi MATSUDA, Shin-ichi OGUNI, and Saeko YAMAGATA	４．巻 38
２．論文標題 Notes on relatively hyperbolic groups and relatively quasiconvex subgroups	５．発行年 2015年
３．雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 99-123
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考