

平成 30 年 6 月 14 日現在

機関番号：17701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17538

研究課題名(和文)非正曲率空間に対する非線形スペクトルギャップ

研究課題名(英文)Nonlinear spectral gap with respect to non-positively curved spaces

研究代表者

近藤 剛史(KONDO, Takefumi)

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号：60467446

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：非正曲率空間に対する非線形スペクトルギャップを厳密に求めることができる新しい例を構成した。ここで非線形スペクトルギャップとは有限グラフと距離空間のペアに対して決まる量であって、距離空間がユークリッド空間の場合にはグラフのラプラシアンの特値ギャップと一致するものである。GromovによるWirtingerの不等式の応用として、正多面体の多くと、幾つかのCoxeter群に対して、非線形スペクトルギャップを厳密に求めることができ、線形の場合に一致することを示した。

研究成果の概要(英文)：We studied nonlinear spectral gap with respect to non-positively curved spaces, and constructed new examples which exact calculation is possible. Here, nonlinear spectral gap is a quantity defined for a pair of a finite graph and a metric space, which coincides with a spectral gap for Laplacian of a graph when a metric space is a Euclidean space. As applications of Gromov's Wirtinger inequality, we compute nonlinear spectral gap exactly for most of the regular polytopes and for some Coxeter groups and showed that they coincide with the linear case.

研究分野：幾何学

キーワード：非正曲率空間 スペクトルギャップ 正多面体 有限Coxeter群

1. 研究開始当初の背景

Margulis の超剛性定理の幾何学的一般化として、リー群や代数群の格子の一般の非正曲率空間(CAT(0)空間と呼ばれる)への等長作用を考えると、その作用が固定点を持つか、そうでなければ(つまり非自明な作用を許容する場合には)、リー群、代数群に付随する対称空間やビルディングを CAT(0)空間が含むのではないかという非常に大きな予想を考えることができ、このようなタイプの主張を幾何学的超剛性という。幾何学的超剛性に対する離散調和写像によるアプローチにおける重要な進展は、井関氏、納谷氏によって与えられた。彼らは一般の単体複体にきれいに(正確には真性不連続かつコンパクトに)作用する離散群を考え、このような離散群を CAT(0)空間に作用させた時に固定点を持つための十分条件を、単体複体の頂点のリンクのスペクトルギャップの言葉で与えた。(Gromov も独立に類似の結果を得ているが、少し弱いものであった)ここでのスペクトルギャップとは、重み付き有限グラフと CAT(0)空間のペアに対して定義される不変量で、CAT(0)空間がユークリッド空間の時には通常のグラフのラプラシアン(ラプラシアン)のスペクトルギャップと一致するものであるため、その非線形の類似物という意味で非線形スペクトルギャップ(Wang の意味での)と呼ばれる。井関氏と納谷氏の与えた十分条件は具体的には非線形スペクトルギャップがすべての頂点で $1/2$ より大きいというものである。この $1/2$ という値は固定点を持たない作用によって実現される例が存在することから、シャープであることも分かっている。このため、非線形スペクトルギャップがいつ $1/2$ を越えるのかを明らかにすること、丁度 $1/2$ に一致する場合の幾何学的状況を詳しく調べることが重要となる。

非線形スペクトルギャップの評価の一つの重要な方法は CAT(0)空間の井関納谷不変量 $([0,1])$ に値をとる)を上から評価する手法で、この手法によりランダム群を用いるとたくさんの適用例が見つかることが井関氏、納谷氏との共同研究により分かっていた。しかし、の厳密な計算例は $=0$ と $=1$ の場合を除いて存在せず、得られているの評価はランダム群に適用するには十分であったが、幾何学的超剛性を目指すには粗すぎるものであり、満足のいく理解には程遠いものである。だからといって、井関納谷不変量より精密な評価をするという方向の研究は、かなりの時間を割いたもののあまり良い結果が得られず極めて難しいというのが我々の印象である。

一方で Pansu は Gromov によって示された CAT(0)空間に対する Wirtinger の不等式を用いることでサイクル、一般化された三角形に対して Gromov の非線形スペクトルギャップを厳密に計算することに成功した。ここで Gromov の非線形スペクトルギャップとは上

で述べた Wang の意味での非線形スペクトルギャップとは少し異なり、一般には Wang のものよりも低い値をとる。しかし、サイクルの場合の結果は線形の場合に一致しており、一般に非線形スペクトルギャップが線形のスペクトルギャップ以下になることと合わせると Wang の意味での非線形スペクトルギャップを求めたことになる。これは全ての CAT(0)空間に対する Wang の非線形スペクトルギャップの計算としては、初めての厳密な計算例であった。

そこで我々はこの Pansu による計算を徹底的に見直し、そこで用いられる Gromov による Wirtinger の不等式の別証明を与えることで Pansu の計算を完全に初等的な立場から理解することに成功した。この理解は、CAT(0)空間の定義から容易に導出される 4 点上の不等式を用いて、その正係数一次結合として非線形スペクトルギャップの下からの評価を直接導出するもので、より広いクラスの有限グラフに対する応用の可能性を示唆するものであった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、全ての CAT(0)空間に対する非線形スペクトルギャップを厳密に計算できる有限グラフの例を増やすこと、およびその計算を通して非線形スペクトルギャップが線形の場合に一致するという現象が起こるグラフのクラスについての知見を得ることである。

3. 研究の方法

非線形スペクトルギャップを計算する方法として、Gromov による Wirtinger の不等式をそのまま繰り返し用いる手法と、グラフの上の Wirtinger の不等式の変種を作りあげ、これを適用する手法の二つがある。前者が適用できるグラフはかなり限られるが、正多面体の多くはこの手法が通用する。グラフによっては後者の手法を取る必要があるが、この違いがどこから来るのかは明らかではない。

4. 研究成果

(1) 正多面体の 1 スケルトンとして現れるグラフ

正多面体は良く知られているように 3 次元では 5 つ、4 次元では 6 つ存在し、5 次元以上では各次元に 3 つずつ存在する。サイクルを 2 次元の正多面体(正多角形のこと)の 1 スケルトンと見なすとオリジナルの Wirtinger の不等式はこの上の不等式であった。これを 3 次元以上の正多面体に拡張する研究を行い、4 次元の正 120 胞体を除くすべての正多面体に対して Wirtinger の不等式の類似物を作ることができた。またこれを用いてスペクトルギャップが線形の場合に一致することを示した。この過程で 4 次元の正 24 胞体、正 600 胞体の 3 次元での切り口に現れる

アルキメデス多面体の一部に対しても Wirtinger の不等式の類似物、非線形スペクトルギャップの計算を行った。正 120 胞体ができなかったのは、長さが異なる対角線の種類が多すぎて、手計算ではできなかったためであり、これをやりきるのは今後の課題である。

(2)有限コクセター群のケイリーグラフ
正多面体での計算はアドホックな計算であり、どのような理由で非線形スペクトルギャップの計算が可能となっているのかが分からなかったため、より体系的に捉えるために有限コクセター群の軌道多面体であることを使った証明ができないかを検討した。二面体群(全てではないが、位数が小さいもの)や 4 次対称群のコクセター生成系に対するケイリーグラフに対して、重み付きの Wirtinger の不等式を得ることができ、これにより重み付きのケイリーグラフの非線形スペクトルギャップが計算できた。重みを動かすことはコクセター群の軌道を取り替えることに対応しており、一般の軌道(コクセター複体の部屋の内点に対応する退化していない軌道)の軌道多面体について理解できたことになる。この研究をさらに進めて一般の有限コクセター群の重み付き Wirtinger の不等式、非線形スペクトルギャップを計算し、更にその退化した軌道での様子が理解できると、正多面体での計算を、この巨大な族の中の一つとして理解したことになるが、現状ではこのように理解するにはまだまだ解決すべき問題がたくさんある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Toshimasa Kobayashi, Takefumi Kondo, The Euclidean distortion of generalized polygons, *Advances in Geometry*, 15 (2015), no.4, 499-506. (DOI : 10.1515/advgeom-2015-0023) 査読あり

Takefumi Kondo, Tetsu Toyoda, Uniform estimates of nonlinear spectral gaps, *Graphs and Combinatorics*, 31 (2015), no.5, 1517-1530. (DOI : 10.1007/s00373-014-1457-6) 査読あり

Takefumi Kondo, Tetsu Toyoda, Takato Uehara, On a question of Gromov about the Wirtinger inequalities, *Geometriae Dedicata*, Accepted, (DOI : 10.1007/s10711-017-0284-3) 査読あり

[学会発表](計 14 件)

Takefumi Kondo, Distortion of some finite graphs, Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, 2018 年

近藤 剛史, Wirtinger の不等式の変種とその応用、北海道大学幾何学コロキウム、2017 年

近藤 剛史, 離散群の等長作用とグラフのスペクトルギャップ、離散幾何構造セミナー、2017 年

近藤 剛史, Wirtinger の不等式の変種と非線形スペクトルギャップ、信州大学数理科学談話会、2017 年

近藤 剛史, Wirtinger の不等式の変種とその応用、熊本大学幾何セミナー、2017 年

近藤 剛史, Distortion of some finite graphs, Hakata Workshop 2017, 2017 年

近藤 剛史, 有限グラフの歪み、第 2 回摂南大学数理セミナー、2017 年

近藤 剛史, ユークリッド空間に対するスペクトルギャップと CAT(0) 空間に対するスペクトルギャップ、測地線および関連する諸問題、2017 年

近藤 剛史, 多面体の非線形スペクトルギャップ、第 63 回幾何学シンポジウム、2016 年

近藤 剛史, グラフの非線形スペクトルギャップのシャープな評価に向けて、福岡大学幾何学セミナー、2016 年

近藤 剛史, ヒルベルト空間へのアフィン作用に対する固定点性質、日本数学会 2016 年度年会、2016 年

近藤 剛史, Gromov による Wirtinger の不等式と非線形スペクトルギャップ、第 11 回代数・解析・幾何学セミナー、2016 年

近藤 剛史, Gromov による Wirtinger の不等式と非線形スペクトルギャップ、名古屋大学多元数理科学研究科 談話会、2015 年

Takefumi Kondo, Nonlinear spectral gaps with respect to CAT(0) spaces, Rigidity School, Tokyo 2015, 2015 年

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

近藤 剛史 (Kondo Takefumi)
鹿児島大学・理工学域理学系・准教授
研究者番号：60467446

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし

(4) 研究協力者 なし