

令和元年6月3日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17539

研究課題名(和文) 結び目と3次元多様体の量子不変量

研究課題名(英文) Quantum invariants of knots and 3-manifolds

研究代表者

鈴木 咲衣 (Suzuki, Sakie)

東京工業大学・情報理工学院・准教授

研究者番号：40636263

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：2014年度から2018年度にかけて、絡み目の普遍量子 sl_2 普遍量の幾何学的性質について研究を行った。J. B. Meilhanとの共同研究により、普遍量子 sl_2 普遍量のある射影部分がMilnor不変量を用いて表されることを示した。J. B. Meilhanとの共同研究により、単連結なヤコビ図の上での sl_2 ウェイトシステムの像と核の次元と対象群の加群としての指標を決定した。絡み目とタングルの普遍量子 sl_2 不変量を、補空間の理想単体分割を使って再構成し、その構成が図式を用いた構成と同等になることを示した。これにより図式を経由した定義とは違う側面から量子不変量を調べる枠組みができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般に量子不変量は絡み目図式とR行列を用いて構成される。図式は2次元的な対象であり、3次元の中の絡み目の次元をひとつ落とす。図式とR行列を用いた代数的、組み合わせ的な定義により、量子不変量と絡み目の3次元的な幾何学的性質の関係は明らかではない。Milnor不変量は絡み数を一般化した不変量であり、代数的、組み合わせ的に定義された量子不変量との関係は非自明である。理想単体分割は絡み目の補空間を3次元のまま分割する方法であり、図式を経由した定義とは違う側面から量子不変量を調べる枠組みになる。

研究成果の概要(英文)：From fiscal 2014 to fiscal 2018, I have studied topological aspects of the universal quantum sl_2 invariant for links. J. B. Meilhan and I showed that the image of a certain projection of the universal quantum sl_2 invariant is obtained by Milnor invariants. J. B. Meilhan and I also determined the dimensions and the characters, as the modules of the symmetric group, of the image and the kernel of the sl_2 homotopy weight system. I gave a reconstruction of the universal quantum sl_2 invariant using ideal triangulation of the link complements. This reconstruction gives a new framework to study quantum invariants.

研究分野：結び目理論、量子トポロジー

キーワード：Quantum invariants knots 3-manifolds

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

結び目理論におけるジョーンズ多項式の発見を転機として3次元位相幾何学は大きく発展し、現在では量子不変量に関連した様々な方向への研究が活発に行われている。量子不変量は数理物理や表現論、圏論などの道具を用いて組み合わせ的に定義されるため、絡み目や3次元多様体の幾何的な性質との関係が明らかでなく、その応用も十分にできているとはいえない。結び目と3次元多様体に対する量子不変量の幾何学的な性質を明らかにすることで量子不変量の理解と応用を進めることは重要である。

普遍量子 sl_2 不変量とは「底タングル」と呼ばれる立方体の中の一次元部分多様体の不変量で、量子群 $Uq(sl_2)$ のテンソル積に値を取る。底タングルを閉じることで任意の絡み目が得られ、「絡み目のすべての量子 sl_2 不変量が底タングルの普遍量子 sl_2 不変量から得られる」という意味において普遍的な性質を持つ。ジョーンズ多項式は量子 sl_2 不変量のひとつである。申請者は研究開始当初までに普遍量子 sl_2 不変量と量子 sl_2 不変量の研究を進めていた。まず「リボン」、「境界」、「ブルニアン」底タングルの普遍量子 sl_2 不変量が $U_h(sl_2)$ のテンソル積のある小さい部分代数に入ることを示し、応用として同じ性質の絡み目の量子 sl_2 不変量がある小さなイデアルに入ることを示した。次にピングダブルという結び目の変形操作の下で量子 sl_2 不変量がどう変化するかを決定した。応用として、ピングダブルをする前とした後の絡み目それぞれでデーモン手術して得られる2つの3次元多様体の「普遍WRT(Witten-Reshetikhin-Turaev)不変量」の差が Habiro ring のある小さなイデアルに入ることを示した。

2. 研究の目的

本研究では、これまでの結果を発展させて結び目と3次元多様体に対する量子不変量の幾何的な性質を明らかにする。具体的には以下の項目を行うことで量子トポロジーを多角的に発展させる。

- (1) J.B. Meilhan (Grenoble University) との共同研究により、ミルナー不変量と普遍量子 sl_2 不変量との関係を明らかにする。ミルナー不変量は絡み数の一般化であり、代表的な古典的不変量である。
- (2) J. B. Meilhan との共同研究により、単連結なヤコビ図の上での sl_2 ウェイトシステムの性質を調べる。
- (3) 絡み目とタングルの普遍量子 sl_2 不変量を、補空間の理想単体分割を使って再構成する。

3. 研究の方法

- (1) Habegger と Masbaum は Kontsevich 不変量の一部として Milnor 不変量を再構成した。普遍量子 sl_2 普遍量は Kontsevich 不変量の sl_2 ウェイトシステムという写像の像として表される。従って Kontsevich 不変量のミルナー不変量の部分から sl_2 ウェイトシステムを取ることで普遍量子 sl_2 普遍量とミルナー不変量との関係を調べることができる。
- (2) 単連結なヤコビ図からの sl_2 ウェイトシステムは、 $Uq(sl_2)$ の3次元規約表現の不変テンソルの双対標準基底を少し変形することで調べることができる。
- (3) 絡み目とタングルの普遍量子 sl_2 不変量は、絡み目やタングルの図式に6項関係式を満たす R 行列を対応させて構成される。 R 行列の6項関係式が図式のライデマイスター移動の下での不変性を保証する。一方で絡み目やタングルの図式の交点に理想八面体を対応させ

ることで補空間の理想単体分割を得ることができる。補空間の理想単体分割の単体に 5 項関係式を満たす S テンソルを対応させる。すると S テンソル 5 項関係式が理想単体分割のバヒナー移動の下での不変性を保証する。普遍量子 sl_2 不変量の R 行列はホップ代数のドリinfeld ダブルから得られる。S テンソルをホップ代数のハイゼンベルグダブルから作ることによって普遍量子 sl_2 不変量を再構成する。

4. 研究成果

2014 年度から 2018 年度にかけて、普遍量子 sl_2 普遍量の幾何学的性質について以下の研究を行った。

- (1) J. B. Meilhan との共同研究により、Milnor 不変量と普遍量子 sl_2 普遍量の関係を調べ論文を執筆した。Milnor 不変量は絡み数を一般化した不変量であり、代数的、組み合わせ的に定義された量子不変量との関係は非自明である。Habegger と Masbaum は Kontsevich 不変量から Milnor 不変量を導出した。本研究では普遍量子 sl_2 普遍量のある射影部分が Milnor 不変量を用いて表されることを示した。
- (2) J. B. Meilhan との共同研究により、単連結なヤコビ図の上での sl_2 ウェイトシステムの性質をしらべ、像と核の次元と対象群の加群としての指標を決定した。量子群 $U_q(sl_2)$ の 3 次元既約表現に対する不変テンソルの canonical 基底を、ヤコビ図と Jones–Wenzl の射影を用いて変形したものを利用した。
- (3) 絡み目とタンゲルの普遍量子 sl_2 不変量を、補空間の理想単体分割を使って再構成し、その構成が図式を用いた構成と同等になることを示した。一般に量子不変量は絡み目図式と R 行列を用いて構成される。図式は 2 次元的な対象であり、3 次元の中の絡み目の次元をひとつ落とす。図式と R 行列を用いた代数的、組み合わせ的な定義により、量子不変量と絡み目の 3 次元的な幾何学的性質の関係は明らかではない。理想単体分割は絡み目の補空間を 3 次元のまま分割する方法であり、図式を経由した定義とは違う側面から量子不変量を調べる枠組みになる。ここからは単体分割を用いた 3 次元的な枠組みを使って、既存の量子不変量を統一的に理解していきたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 3 件)

- (1) (査読あり) [Sakie Suzuki](#), The universal quantum invariant and colored ideal triangulations. *Algebr. Geom. Topol.* 18 (2018), 3363-3402.
- (2) (査読あり) J.-B. Meilhan, [Sakie Suzuki](#), Riordan trees and the homotopy sl_2 weight system, *J. Pure Appl. Algebra.* 221 (2017), no. 3, 691-706.
- (3) (査読あり) J.-B. Meilhan, [Sakie Suzuki](#), The universal sl_2 invariant and Milnor invariants, *Internat. J. Math.* 27 (2016), no. 11, 1650090 (37pages).

〔学会発表〕(計 8 件)

- (1) [Sakie Suzuki](#), “A reconstruction of the universal quantum invariant using ideal triangulations”, *Classical and quantum 3-manifold topology*, Monash University, Melbourne, Australia, 2018/12/19.

- (2) Sakie Suzuki, ``The universal quantum invariant and colored ideal triangulations'', Topological invariants in low dimensional topology, Shimane University, 2017/11/1,
- (3) Sakie Suzuki, ``The universal quantum invariant and colored ideal triangulations'', Recent Developments in Operator Algebra, RIMS, 2017/9/5,
- (4) Sakie Suzuki, ``The universal quantum invariant and colored ideal triangulations'' Low dimensional topology and number theory IX, AiRIMaQ Seminar Room, Innovation Plaza, Fukuoka, 2017/3/16,
- (5) Sakie Suzuki, ``Construction of quantum g invariant via ideal triangulation'', Workshop on knot theory and related topics -presented by women in mathematics II, RIMS, Kyoto University, 2016/8/10,
- (6) Sakie Suzuki, ``The universal sl_2 weight system on the space of tree Jacobi diagrams'', Topology and Geometry of Low dimensional Manifolds, Nara International Seminar House, 2014/10/29,
- (7) Sakie Suzuki, ``Quantum topology and LMO invariant'' Workshop on the universal finite type invariants, University of Tokyo, 2014/6/8,
- (8) Sakie Suzuki, ``The universal sl_2 invariant and Milnor's invariants'' Low dimensional topology and number theory VI, Soft Research Park Center, Fukuoka, 2014/3/18.

〔図書〕(計 1 件)

- (1) 葉広和夫, 鈴木咲衣, 圏論の歩き方委員会 (編集), 日本評論社, 「圏論の歩き方」, 2015, p37-p54.

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

<http://www.is.c.titech.ac.jp/~sakie/>

6 . 研究組織

- (1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。