

令和元年6月24日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17540

研究課題名(和文) 群の順序構造による視点からのトポロジーの研究とその応用

研究課題名(英文) Topology from a prospect of group invariant orderings and its applications

研究代表者

伊藤 哲也 (Tetsuya, Ito)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：00710790

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：群の順序構造に触発された様々な概念やアイデアを用いて低次元トポロジーに関連する問題を幅広く研究した。川室圭子氏との共同研究により、open book foliationの理論を整備し、接触三次元多様体を位相幾何的な手法で調べる手段を確立した。特に、Fractional Dehn twist coefficient(FDTC)と呼ばれる写像類群・Braid群の順序と密接に関連した量と接触幾何または通常のトポロジーとの関連を調べた。また、群の孤立順序や、三次元多様体の基本群の一般化ねじれ元、両側順序付けについて具体例や存在・非存在の条件を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

低次元トポロジーの研究は様々な違う分野からの刺激やアイデアを受けて発展を続けている分野であるが、順序構造との関連は近年になり着目されるようになった視点である。群の順序という代数的な構造が幾何的な情報と関連していること、またいくつかのトポロジーの問題を解くことに有用であることがわかり、低次元トポロジーの研究の新しい手法の一つを開拓できた。

研究成果の概要(英文)：I studied various problems related to low-dimensional topology inspired by invariant group orderings. In joint works with Keiko Kawamuro (Univ. Iowa) we established a theory of open book foliation and constructed a method to study contact 3-manifolds by topological method. In particular, we studied the relation between Fractional Dehn twist coefficients (FDTC), a quantity closely related to orderings of braid groups or mapping class groups, and topology or contact structures. We also studied isolated orderings, and a condition to exist (not to exist) generalized torsion elements or bi-ordering on 3-manifold groups.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：三次元多様体 接触幾何 組みひも群 オープンブック分解 順序群

1. 研究開始当初の背景

群の不変順序は群の直線への忠実作用を代数的に記述したものであり、古くは群論の一分野として研究されていた対象である。近年になり、群の順序構造についての研究が一次元力学系・低次元トポロジーの分野で興味を集めるようになるとともに、活発に研究されるようになった。特に、有理ホモロジー球面の Heegaard Floer homology L -space がその基本群の順序付け可能性及び taut 葉層構造の非存在と同値であろうという予想 (L -space 予想) は多くの研究者の興味を集め、盛んに研究されている。

そのような状況を踏まえ、本研究ではより幅広く、群の不変順序とトポロジーとの関連や、その応用などについて調べ、順序構造というこれまでのトポロジーとは少し異なる新しい視点や手法を用いて古典的なトポロジーの問題を調べることを考えた。また、順序群に関することについて広範に調べることで、他分野との新しい関連や交流を生み出すことを考えた。

2. 研究の目的

本研究では、近年活発に研究されるようになってきている群の順序構造の視点や手法、あるいはそれに触発された考え方や問題意識などを通して、低次元トポロジーを研究することを目的とする。とくに、順序構造というこれまでと少し違った視点からの研究により、低次元トポロジーにおける主要な問題について新たな知見や結果を得ること、あるいは新しい関連や現象などの発見を目指す。具体的に、群の左不変あるいは両側不変順序あるいはそれに関連するより一般の順序に関連した構造を利用し、古典的なトポロジーの問題へ応用することを考える。

例えば、群の左順序を一つ固定することで、群の各元について比較を行うことが可能になる。その際に、単位元と比較しずっと大きな元は順序の意味でより複雑な元と見ることができ、一方で、群の順序の定義においては群の幾何的な情報を利用することが多く、このような幾何的によい起源をもつような順序について十分大きな元は幾何的に複雑な対象とみることができ、とくに、そのような元に関連したトポロジーの対象 (例えば写像類群の元による三次元多様体の張り合わせなど) は何らかの意味で複雑な対象と見ることができ、何らかの非自明な性質を持つことなどが期待できる。このようなアイデアを数学的に正当化し、順序構造から幾何的な対象への情報を得ることを目標とする。

3. 研究の方法

Birman-Menasco による Braid foliation の手法の一般化として、川室圭子氏との共同研究により Open book foliation の理論・手法を創始した。以前の研究により、Braid 群の Dehornoy 順序と呼ばれる標準的な順序構造と Braid foliation の複雑さ、特異点の個数やその配置といった情報との間に深い関連があること、またそれを利用することで、Dehornoy 順序を結び目理論へと応用できることなどを示している。したがって、順序構造と Braid foliation との関連をより一般化することで、写像類群の順序構造と Open book foliation、特に三次元接触幾何への応用が期待される。とくに、本研究では関連した写像類群の有理数値不変量である Fractional Dehn twist coefficient (FDTC) と接触三次元多様体との関連を調べ、順序構造を接触幾何学の研究に応用する。また、合わせて周囲の関連する問題などを幅広く、順序構造との関連を意識して研究することで、低次元トポロジーを特定の分野にとらわれず広い視点で研究を行う。

4. 研究成果

Open book foliation の理論について、その基本的な手法や理論の整備を行うことができた。特に、その源流となっている Braid foliation について (三次元球面及びその内部の結び目について) 示されている諸結果を、open book foliation に一般化する (一般の三次元接触多様体及びその内部の transverse 結び目へと拡張する) ための基本的な手法を確立した。Open book foliation の手法により、(順序構造の応用という当初の目的意識を超えてより一般に) 三次元接触幾何の様々な問題、特に tight 性の判別や Bennequin 不等式の等号成立条件といった問題について大きな進展を得た。例えば、写像類群の right-veering と呼ばれる性質は接触構造の tight 性と密接にかかわるものであるが、写像類群の (not) right-veering 性を接触構造の言葉で特徴づけを与えることに成功した。具体的に、写像類群の元が not right-veering であるための必要十分条件は、対応するオープンブックの binding の depth が 1 であること、つまり対応する三次元多様体内に binding とちょうど一点で交わるような overtwisted disk が存在することである。さらに研究を進め、Right-veering の概念を一般化した quasi right-veering という概念を提唱した。これは、穴あき曲面の場合についての適切な right-veering の拡張であり、right-veering に対して成立する結果 (Right-veering による tight 性の特徴づけなどの諸結果) は、quasi right-veering を用いることで一般の三次元多様体の transverse 結び目の補空間の状況へと一般化される。

また、写像類群上のランダムウォークが写像類群の順序について非有界であることを利用することで、写像類群のランダムウォークおよびオープンブック分解を利用して構成されるランダムな(接触)三次元多様体のモデルにおいては、確率1で双曲多様体・ taut 葉層構造を持ちかつL-spaceではないものが現れることを示し、ランダムモデルの手法から確率1でL-space予想が正しいことを示すことができた。L-space予想については多くの場合、特定の三次元多様体のクラスについて、L-spaceである(ない)こと、左不変順序構造を持たない(持つ)こと、 taut 葉層構造を持たない(持つ)ことをそれぞれ独立して調べ、その結果を比較し一致することを示すという間接的な手段での確認を行う結果が多い。そのため、予想が正しいこと示されているが、肝心であるL-spaceという性質と基本群の順序がなぜ関連するのかについてのあたらしい知見を与えることができない。それに対し、このランダム性からの観点の結果は間接的ではあるものの、L-space予想の成立の一つの根拠(ランダムな条件下で「すべて」の多様体が非L-spaceかつ左順序を持たないための十分条件をみ出す)を与えることになった。

ファイバー結び目群の両側順序付け可能性について、そのアレキサンダー多項式の実根と密接に関連していることが知られ、特に、両側順序付け可能であるならばそのアレキサンダー多項式は必ず正の実根を持つことが知られている。この結果について、ファイバー結び目という仮定を有理ホモロジー的にファイバー結び目という仮定に弱めることに成功した。通常のファイバー結び目に比べ、有理ホモロジー的にファイバー結び目はずっと広いクラスであり、例えばすべての交代的結び目を含み、交点数の少ない結び目のほとんどが有理ホモロジー的にファイバー結び目である。これにより、結び目群の両側不変順序をより広いクラスについて研究することが可能になった。

それ以外にも、概交代的結び目の位相的特徴づけ、braid群のhomology表現によるcolored Alexander, colored Jones多項式の表示、Brau表現とBraid群のGarside構造との関連、また他の研究者の提出した問題の解答など、他者の論文や研究集会での発表や研究討論などに触発されることにより、Braid群・写像類群や低次元トポロジーに関連する様々な問題についても結果を得ることができた。これらの議論や結果は直接には順序構造と関連を持たないものも多いが、これらの事柄の研究を通して新しい知識や視点を得ることができ、順序構造の応用へとつながる手がかりを得ることができた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 13 件)

Tetsuya Ito,

On a structure of random open books and closed braids
Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 査読有, 91 (2015), 160--162

Tetsuya Ito,

A homological representation formula of colored Alexander invariant,
Adv. Math. 289 (2016) 142--160. 査読有

Tetsuya Ito,

Construction of isolated left orderings via partially central cyclic amalgamation,
Tohoku Math. J. 68 (2016) 49--71. 査読有

Tetsuya Ito,

Framing function and strengthened version of Dehn's lemma
J. Knot Theory Ramifications, 25, 1650031 (2016) 査読有

Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro,

Coverings of open books,
Advances in the Mathematical Sciences
Research from the 2015 Association for Women in Mathematics Symposium 査読有

Tetsuya Ito,

On the 3-dimensional invariant for cyclic contact branched coverings,
Topology Appl. 216 (2017) 1--7 査読有

Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro,
On a question of Etnyre and Van Horn-Morris,
Algebr. Geom. Topol. 17 (2017) 561--566 査読有

Tetsuya Ito,
Alexander polynomial obstruction of bi-orderability for rationally homologically fibered
knot groups
New York J. Math 23 (2017) 497-503. 査読有

Tetsuya Ito and Matthieu Calvez,
Garside-theoretic analysis of Burau representations
J. Knot theory Ramifications 1750040 (2017) 査読有

Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro,
Essential open book foliation and fractional Dehn twist coefficient
Geom. Dedicata, 187 (2017) 17--67 査読有

Tetsuya Ito,
A characterization of almost alternating knot,
J. Knot Theory Ramifications, 27, 1850009 (2018) [13 pages] 査読有

Tetsuya Ito,
On a relation between the self-linking number and the braid index of closed braids in
open books,
Kyoto J. Math. 58, (2018), 193-226. 査読有

Tetsuya Ito and Keiko Kawamuro,
Positive factorizations of symmetric mapping classes
J. Math. Soc. Japan. 71 (2019) 309-327. 査読有

[学会発表](計8件)

<国際学会での発表:いずれも招待講演>

Tetsuya Ito
Homological representation formula of some quantum sl_2 invariants
First Encounter to Quantum Topology: School and Workshop, 2015 7/15--22, KIAS, Seoul,
Korea

Tetsuya Ito
On a relation between the self-linking number and the braid index of closed braids in open
books, Braids, Configuration Spaces and Quantum Topology, 2015 9/7--10, 東京大学

Tetsuya Ito
Quasi-right-veering braids in transverse knot theory / 2016 International Conference on
Low-dimensional Topology, 6/13--6/15, Southwest Jiaotong University, China.

Tetsuya Ito
On a structure of Dehn surgery along knots and LMO invariant /Low dimensional topology
and number theory IX, 2017, 3/15--1/18, 九州大学

Tetsuya Ito
Braids, chain of Yang-Baxter like operations, and knot invariants /Self-distributive system
and quandle (co)homology theory in algebra and low-dimensional topology, 2017
6/11--6/17, Kolon Seacloud Hotel, Pusan Korea

Tetsuya Ito
Characterization of strongly quasi positive closed braids/Representation spaces,
Teichmuller theory, and their relationship with 3-manifolds from the classical and
quantum viewpoints 29 January - 2 February, 2018

Tetsuya Ito

Strongly quasipositive braids in general contact 3-manifolds / ICM2018 Satellite conference
"Braid groups, configuration spaces and homotopy theory, 2018, 7/23--7/27, University of
Bahia, in the city of Salvador da Bahia

Tetsuya Ito

Right-veering type characterization of tightness/ AMS Sectional Meeting Special Session
on Three-dimensional Floer Theory, Contact Geometry, and Foliations, 2019 3/22,
University of Hawaii at Manoa, Honolulu.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。