様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ４ 月 ２４ 日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１７５４１

研究課題名（和文）測度距離空間の局所構造と位相構造

研究課題名（英文）The local structure and topological structure on metric measure spaces

研究代表者
北別府　悠（Kitabeppu, Yu）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・准教授

研究者番号：５０７２８３５０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：RCD 空間と呼ばれる測度距離空間は，Ricci 曲率が下に有界で次元が上に有界であるような Riemann 多様体の一般化である．このような空間を調べることは幾何学的に非常に意味があることが知られているが，一般に非常に特異な空間になり，解析が難しいとされている．本研究では次元が低い場合にこのような空間を分類し，また次元が高い場合でも，ある条件をつけることで扱いやすいクラスを定義して，研究を行った．さらに一般の RCD 空間上で性質の良い点が豊富にあることを示した．

研究成果の概要（英文）：RCD spaces are one of the generalization of Riemannian manifolds with lower Ricci bound and upper dimension bound. These spaces are known to be worth studying in order to understanding the geometry of Riemannian manifolds. However it is difficult to analyze such spaces because of the complexity of local structure in those. In our study, we classify the low dimensional RCD spaces. And we define the subclass of RCD spaces that can be treated easier than generic ones. Also, we prove the high dimensional regular sets exist plentifully.

研究分野：リーマン幾何学

キーワード：RCD 空間　正則集合　Gromov-Hausdorff 収束

１．研究開始当初の背景

多様体とは限らない測度距離空間上に Ricci 曲率の下限条件が定義された．これを曲率次元条件という．一般の測度距離空間には微分構造などは存在しないので，通常の曲率テンソルをとおして Ricci 曲率を定義する事は出来ないが，Wasserstein 空間と呼ばれる確率測度のなす距離空間上の特別な汎関数の凸性をもって曲率次元条件は定式化される．他方，80 年代に Bakry-Emery らは Dirichlet 形式の言葉を用いて曲率次元条件を定義した(こちらのほうがオリジナルの曲率次元条件の定義である)．曲率の下限条件と測度距離空間上の Laplacian の線型性を仮定するとこの二つの定義はほとんど一致し，Ricci limit 空間を含む様な大きなグループをなす．この様な空間を RCD 空間と呼ぶ．RCD 空間は Ricci limit 空間を含むが，RCD 空間が Ricci limit 空間として必ず実現出来るかどうかは未だ不明である．この様に RCD 空間は分からない事だらけであるが，近年発達した測度距離空間上の解析，特に熱流の方法により様々な定理が証明されている．特に Gigli による非負曲率を持つ RCD 空間の分裂定理の証明では熱流の解析的な性質と，Wasserstein 空間の幾何，そして Dirichlet 形式の解析を通じて幾何学的な定理を得ている．またここで開発されたいくつものテクニックはその後いろいろな場面で応用され，Mondino-Naber らによる RCD 空間の rectifiability の証明まで到達した．

２．研究の目的

先に述べたとおり，RCD 空間全体と Ricci limit 空間全体が一致するかは定かでは無い．Ricci limit 空間は多様体の極限として記述出来るので，Ricci limit 空間の幾何学は Riemann 多様体の幾何学を使って研究ができる．しかし，一般の RCD 空間はこの様な近似列が存在しないので Riemann 幾何学の知識がそのままでは通用しない．そこで本研究では Ricci limit 空間では無い様な RCD 空間の局所的および大域的な性質を調べる事である．

この研究の目的は大きく分けて二つある．一つは Ricci limit 空間と RCD 空間の違いを理解する事である．RCD 空間上で使える道具は Ricci limit 空間より格段に少ない．ゆえに Ricci limit 空間で当然なりたつ性質が RCD 空間上で成立することを示すのが困難であることがあり得る．これは技術的な限界であるわけではなく，本質的に一般の RCD 空間では成り立たないことかもしれない．

二つめは RCD 空間特有の手法を開発することで無限次元である様な測度距離空間に応用を見つけることである．ここでいう無限次元とは真に Hausdorff 次元が無限次元の場合もあるし，形式的な次元と呼ばれるものを指すこともある． RCD 空間の一つ良いところとして，Riemann 多様体とは違って距離と測度が対応してなくても良いことが挙げられる．すなわち通常の Riemann 多様体上では Riemann 計量によって距離も測度も決まってしまう．RCD の枠組みでは測度は必ずしも Hausdorff 測度でなくて良いのでより豊富な測度距離空間を扱うことが出来る．

３．研究の方法

一般の RCD 空間すべてで成り立つ様な性質を見つけると言うよりは，ある程度自然な条件を付けた上で個別の場合に対して考察していく．RCD 空間は正確には RCD(K,N) と二つのパラメータ K,N が存在する．ここで K は Ricci 曲率の下限，N は次元の上限を意味している．ここで言う次元は形式的なものであり，一般の場合 Hausdorff 次元等の自然な次元とはとりあえず関係はない．ただ，Hausdorff 次元はこのパラメータ以下であることは知られている．

(1) RCD(K,infinity)空間の幾何学.

これは Ricci 曲率の下限は考えても次元の上限は考えない様な測度距離空間を対象にする．この場合条件が少なくなることに加え，無限次元のものも考えなくてはいけないので非常に難しい．特に有限次元の場合は Riemann 多様体と同様 Bonnet-Myers の定理が成り立つが，K が正であっても RCD(K,infinity)空間はコンパクトでないことがあり得る．ここでは熱核にある仮定を置くことで直径が有限になることの必要十分条件を得ている．これは有限次元では当たり前に満たされる条件なので有限次元と無限次元の違いをこの条件の意味を深く考えることで研究していく．

(2)RCD(K,1)空間の分類

一次元の多様体の分類は知られており，Ricci limit 空間の場合も一次元の分類定理が知られている．その証明は Ricci limit 空間のある種の正則性によるもので，RCD 空間上では適用することができない．そこで分裂定理の証明をよく理解し，RCD 空間でも一次元の分類定理を与えたい．

(3)RCD(K,N)空間が Hausdorff 次元 N を持つ場合

この場合は Ricci limit 空間における非崩壊極限に対応している．近似している Riemann 多様体の次元と Hausdorff 次元が等しい Ricci limit 空間を非崩壊な Ricci limit 空間と呼んでいる．この空間は一般の Ricci limit 空間よりも特異性が非常に低いことが知られている．RCD 空間でもこの場合は特異性が低いことが期待できるので局所理論を展開できないか考察していく

(4)RCD 空間が局所 CAT 空間の時

CAT 空間とは断面曲率が上から押さえられた様な Riemann 多様体の距離空間への一般化である．Riemann 多様体上では断面曲率の平均が Ricci 曲率なので Ricci 曲率の下限と断面曲率の上限から断面曲率の下限条件が出てくる．これを RCD の枠組みでも証明していきたい．CAT 空間はいくつかの局所理論が知られているのでそれらと RCD 空間の幾何を組み合わせて研究をしていく．

(5)RCD(K,2)空間と Alexandrov 空間
二次元においては Ricci 曲率と断面曲率は一致する．RCD(K,2)空間は一次元でないとすると，二次元なので多様体と同様の結果が成り立つはずである．すなわち，断面曲率が下に有界である Riemann 多様体の距離空間への一般化を Alexandrov 空間というが，RCD(K,2)空間は Alexandrov 空間になるはずである．逆，つまり Alexandrov 空間であれば RCD 空間であることはすでに示されている．そこで使われた論法を調べてこの問題にアタックしていくことにする．

(6)RCD(0,N)空間の基本群の研究
Milnor は Ricci 曲率が非負の Riemann 多様体の基本群は有限生成である，と予想した．現在までに条件付きでは解かれているが一般の場合は三次元までしか解かれていない．そこでこの問題を一旦抽象化し，RCD 空間の枠組みで何かできることはないか考えていく．

４．研究成果
投稿論文について簡単な解説をつける．以下の番号は下記 5 において付けられた番号と対応している．

4 では Milnor 予想に関連して適当な仮定の下，Ricci 曲率非負の RCD 空間の基本群が有限生成であることを示した．ここで特に普遍被覆空間の存在を仮定する必要があり，位相に仮定をつける必要があった．現在までに被覆空間の極大元としての普遍被覆空間の存在は示されているが，それが単連結であるかどうかはよくわかっていない(Mondino-Wei,2016)．また証明ではこの段階では適切な次元の定義がなかったので解析的に微妙な評価をする必要があった．のちに述べるが，現在ではあまりその様な計算をする必要はなくなっている．

3 では有限次元とは限らない RCD 空間が正曲率を持つときに直径が有限になることの必要十分条件を熱核の言葉を使って与えた．また直径の評価も熱核を使って与え，しかもそれは漸近的にシャープである．このような評価は Riemann 多様体ですら知られておらず，全く新しい考え方である．熱流の評価を与えるときにかなり幾何学的な考察を使っているので，無限次元の等周不等式との関連も今後調べていくべき課題である．

2 では Fordham 大学の Sajjad Lakzian 氏との共同研究で一次元 RCD 空間の分類を行った．ここでのポイントは二つある．一つは RCD(K,1)空間ではなく一次元の正則集合が一点でもあれば空間そのものが一次元になってしまうというかなり強い結果が得られたということ．通常抽象的な測度距離空間ではほとんどいたるところある性質が成り立つというように測度 0 の特異性を排除出来ない．この場合は一次元の特殊性と最適輸送理論の深い結果を組み合わせることでこのような結果が得られた．二つ目は Ricci limit 空間での結果よりも情報が豊かであるということ．詳しく述べると，Ricci limit 空間の場合は距離の構造しか得られなかったが，我々の結果では測度の情報をしっかりと引き出すことができた．ここでの結果は非常に抽象的な RCD 空間の世界で分類を与えたということで方法論も含め，一定の応用も見つかっている(preprint)．

1 では非崩壊な Ricci limit 空間の対応物として Bishop 型不等式を満たす RCD 空間というものを定義した．これは単に距離球の測度の振る舞いをコントロールする物であるが，それだけの仮定から接錐と呼ばれる空間の拡大極限がすべて距離錐という性質の良いものになってしまうということが示せる．また測度の情報も得ることができた．その後この論文で論じた仮定よりも弱い仮定の下同様の性質が示せることがアナウンスされた(De Philippis-Gigli,2017)．しかしながら未だ非崩壊 RCD 空間と呼べるクラスの決定的な定義はなされておらず，今後さらにこの方向の研究は進むと考えられる．

以下，研究開始当初の思惑通り行かなかった部分について説明する．まず RCD(K,2)空間が Alexandrov 空間になるかという問題だが，これは未解決のままである．Alexandrov 空間上では平行移動と呼ばれる概念が定義されている．この概念を使って RCD 空間が局所 CAT 空間ならば Alexandrov 空間になることが最近示された(Kapovitch-Ketterer,2017)．しかしながらこの平行移動というものは Alexandrov 空間の研究者でも未だ完全に理解しているものは非常に少ないと言われており，原論文の解読も困難である．したがって今の所私自身は証明をフォローできていない．RCD 空間上で最近平行移動に関する論文が発表された(Gigli-Pasqualetto,2018)．こちらの方はまだ読めるのでこちらを勉強し，Alexandrov 幾何との関連を理解しながら上記の問題について，理解あるいは解決を目指していこうと思っている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）
1.Yu Kitabeppu, ``A Bishop type inequality on metric measure spaces with Ricci curvature bounded below”, Proc. Amer. Math. Soc. 145(2017), no.7, 3137—3151(査読有)
https://doi.org/10.1090/proc/13517

2.Yu Kitabeppu, Sajjad Lakzian, ``Characterization of low dimensional RCD^*(K,N) spaces”, Anal. Geom. Metr. Spaces 4 (2016), 187—215(査読有)
https://doi.org/10.1515/agms-2016-0007

3.Yu Kitabeppu, ``A finite diameter theorem on RCD(K,¥infty) spaces for positive K”, Math Z. 283(2016), no.3-4, 895—907(査読有)
https://doi.org/10.1007/s00209-016-1626-9

4.Yu Kitabeppu, Sajjad Lakzian, ``Non-branching RCD(0,N) geodesic spaces with small linear diameter growth have finitely generated fundamental groups”, Canad. Math. Bull. 58(2015), no.4, 787—798(査読有)
http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2015-052-4

〔学会発表〕（計 10 件）
1.北別府 悠, “特異空間上の結節領域定理”, 淡路島幾何学研究集会 2018, 2018 年 1 月 26 日, 阿那賀地区公民館

2. Yu Kitabeppu, “The highest dimensional regular sets on RCD spaces”, Conference on Metrics and Measures, 2018 年 1 月 8 日, 東北大学

3. Yu Kitabeppu, “On the measure of the highest dimensional regular set on RCD spaces”, 2017 Chongqing Workshop on Differential geometry, 2017 年 11 月 16 日, 重慶理工大学
4. 北別府 悠, “Ricci 曲率が下から抑えられた測度距離空間の正則集合”, 幾何学阿蘇研究集会, 2017 年 9 月 28 日,休暇村南阿蘇

5. 北別府 悠, “測度距離空間上の正則集合について”, 日本数学会 2017 年度年会, 2017 年 3 月 25 日, 首都大学東京

6. 北別府 悠, “RCD 空間上の正則集合について”, 淡路島幾何学研究集会 2017, 2017 年 1 月 28 日, 国民宿舎慶野松原荘

7. Yu Kitabeppu,”On RCD spaces with Bishop-type inequalities”, Geometric Analysis on Riemannian and Metric spaces, 2016 年 9 月 8 日, 京都大学

8. Yu Kitabeppu, “The classification of one dimensional RCD spaces”, Metric geometry and its applications, 2016 年 2 月 23 日,復旦大学(中国上海)

9. 北別府 悠, “RCD 空間の正則集合について”, 淡路島幾何学研究集会 2016, 2016 年 1 月 22 日, 国民宿舎慶野松原荘

10. 北別府 悠, “低次元 RCD 空間の分類について”, 第 62 回幾何学シンポジウム, 2015 年 8 月 29 日, 東京理科大学

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織
(1)研究代表者
北別府 悠（KITABEPPU Yu）
熊本大学大学院・先端科学研究部・准教授
研究者番号：50728350

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者

(　　　)