

令和 2 年 5 月 12 日現在

機関番号：15201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K17542

研究課題名(和文)2重調和写像・2重調和部分多様体の分類問題の研究とその応用

研究課題名(英文)Classification of biharmonic maps and biharmonic submanifolds, and its applications

研究代表者

前田 瞬 (Maeta, Shun)

島根大学・学術研究院理工学系・講師

研究者番号：00709644

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：球面内の完備2重調和部分多様体 M は一定の平均曲率を持つというBMO予想 に対し、以下の仮定のもと肯定的部分的解決を与えた：1. M の断面曲率は上から押さえられており、平均曲率は下から押さえられている、また、ある種の積分条件があること。2. 平均曲率ベクトルは0にならず、第2基本形式のノルムが上から押さえられている、また、ある種の積分条件があること。更に、三浦友也氏との共同研究で3次元空間形からの3重調和リーマン沈め込みは調和になることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究ではEells-Sampsonにより導入された調和写像の一般化である2重調和写像、3重調和写像の中でも最も重要な問題であるBalmus-Montaldo-Oniciuc予想とChen's conjectureとその一般化の肯定的部分的解決を与えている。

研究成果の概要(英文)：I gave many affirmative partial answers to BMO conjecture that is, any complete biharmonic submanifold M in spheres has constant mean curvature" under the following assumptions: 1. the sectional curvature of M is bounded from above and the mean curvature is bounded from below with some integrability conditions, 2. nowhere zero mean curvature vector, the squared norm of the second fundamental form is bounded from above and some integrability conditions. Furthermore, I and Tomoya Miura showed that any triharmonic Riemannian submersion from a 3-dimensional space form is harmonic.

研究分野：幾何学

キーワード：2重調和写像 2重調和部分多様体 Chen予想 BMO予想 3重調和 沈め込み

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

2重調和理論の中でも最も興味深くかつこの分野を牽引している問題に1989年頃 B. Y. Chen により提起された「ユークリッド空間内の2重調和部分多様体は極小であろう」という Chen 予想がある。この予想に対して多くの研究者により数々の研究結果が与えられたが未だ完全な解決は与えられていない。完全な解決が与えられているのは1. E^n 内の曲線, 2. E^3 内の曲面, 3. E^4 内の超曲面のときのみである。この予想は2001年に Caddeo-Montaldo-Oniciuc らにより外の空間の曲率が非正, 特に曲率が非正かつ一定のときにも正しいだろうと一般化された。一方, 外の空間の曲率が正の場合には極小でない2重調和部分多様体の例が数多く知られていたが, 様々な研究の後, 2008年に Balmus-Montaldo-Oniciuc らにより, 球面内の2重調和部分多様体は平均曲率一定であろうという BMO 予想が提出された。これらの予想はいずれも部分多様体に完備性の仮定がなされておらず, 局所的な問題である。また, 用いられた手法は外の空間の次元が4以下の場合にしか用いることができない。私はこの状況を打破するために, 部分多様体の完備性を仮定して大域的に見た問題を考えた。そして, まず Chen 予想に対して芥川教授との共同研究により部分多様体の Ricci 曲率が下から押さえられるという仮定のもと予想の部分的解決を得た。ところが, この仮定は本質的に第二基本形式に仮定をおくことになり, 非常に人工的仮定となる。そこで, 部分多様体に proper の仮定を付加するだけでこの人工的仮定を回避し, 予想の部分的解決を得た。一般化された Chen 予想に対しては単独で, 部分多様体が proper かつ外の空間の曲率に弱い仮定をおくことで部分的解決を得た。この結果は一般の proper な部分多様体についての結果から得られるものがある。また, BMO 予想に対しては単独で平均曲率が1以上の場合に対して多くの部分的解決を得た。

2. 研究の目的

本研究ではこれまで別々に研究されてきた Chen 予想, BMO 予想を, 空間形の問題として統一的に捉え, 更に部分多様体に完備性を仮定し大域的にみた問題を扱うことにした。すなわち, 「空間形内の完備2重調和部分多様体は平均曲率一定であろう」という問題に取り組むことにした。問題解決の為に, この予想を更に広い視野で捉えるため, 空間形をも含む対称空間内の2重調和部分多様体の分類を行うこととした。そして, 2重調和部分多様体の本質を捉えることにより, この予想を解決することを目標とした。

3. 研究の方法

予定通り, 空間形の問題として統一的に問題を捉え研究をこなした。また, 完備性の仮定をつけて問題を大域的に捉えて研究を行なった。特に, Yong-Luo との共同研究により, BMO 予想の部分的解決を得るために, 研究過程で新しい Liouville タイプの定理を得た。そして, この Liouville タイプの定理をうまく用いるという方法で研究を行なった。

4. 研究成果

得られた結果は次のとおりである。

I. 単独の研究で次を得た。

(1) $\phi : (M^m, g) \rightarrow (N^{m+1}, h)$ を完備非正曲率 biminimal 超曲面とする。平均曲率 H が $0 < H \leq 1$ を満たすとする。もし $|B|^2 \leq \text{Ric}^N(\xi, \xi)$, ここで, B は第2基本形式で, Ric^N は N のリッチ曲率, ξ は M の単位法ベクトル場である。この時, ある $0 < p < \infty$ に対して,

$$\int_M H^{-p} dv_g < \infty,$$

を満たせば, H は一定である。

(2) $\phi : (M^m, g) \rightarrow (S^{m+1}, h)$ を球面内の完備2重調和超曲面で平均曲率ベクトル場が0にならないとする。この時, もし, $|B|^2 \leq m$, かつ, ある $0 < p < \infty$ に対して

$$\int_M H^{-p} dv_g < \infty,$$

であれば H は一定である。

II. Yong-Luo との共同研究で次を得た。

(1) (M, g) を完備リーマン多様体で $u \in (0, C]$, ($C > 0$) を M 上の優調和関数とする。この時, もし, ある $p > 0$, $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\int_M (\log^{(k)} \frac{Ce^{(k)}}{u})^p d\mu_g < +\infty$$

であれば u は一定である。ここで次の記号を用いている: $\log^{(k)} = \log(\log^{(k-1)})$, $e^{(k)} = e^{e^{(k-1)}}$ ここで, $\log^{(1)} = \log$ and $e^{(1)} = e$.

(2) $\phi : (M^m, g) \rightarrow (N^{m+1}, h)$ を完備2重調和超曲面とする。平均曲率 H が $0 < H \leq 1$ を満たすとし, $|B|^2 \leq \text{Ric}^N(\xi, \xi)$ とする。ここで, B は M の第2基本形式であり, Ric^N は N のリッチ曲率であり, ξ は M の単位法ベクトル場である。この時, もし, ある $p > 0$, $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\int_M (\log^{(k)} \frac{e^{(k)}}{H})^p d\mu_g < +\infty$$

であれば, H は一定である。

III. 三浦友也氏との共同研究で, 3重調和沈め込みを考え, 沈め込み版の一般化された Chen 予想, すなわち, 「空間形からの3重調和リーマン沈め込みは調和である」を3次元の場合に証明した。

$\varphi : (M^3(c), g) \rightarrow (N^2, h)$ を3次元空間形からの3重調和沈め込みとする。この時, φ は調和である。

VI. Ye-Lin Ou との共同研究により以下の研究結果を得た:

(1) 空間形内のアインシュタイン超曲面が2重調和であるための必要十分条件は (a) 極小もしくは (b) 第2基本形式のノルムの2乗がある定数となることである。この系として次を得た。

(2) ユークリッド空間及び双曲空間内の2重調和アインシュタイン超曲面は極小である。また, 球面内のコンパクトな2重調和部分多様体についてはスカラー曲率一定のもの次の結果を得た。

(3) 球面内のコンパクトかつスカラー曲率一定な2重調和部分超曲面は (a) 極小, もしくは (b) 平均曲率が一定でありかつ, 第2基本形式のノルムの2乗がある定数となる。

(4) アインシュタイン定数がドメインの次元以下となるアインシュタイン多様体内のコンパクトアインシュタイン超曲面が2重調和となる必要十分条件は (a) 極小もしくは (b) 第2基本形式のノルムの2乗がある定数となることである。

(5) 非正曲率を持つアインシュタイン多様体内のコンパクトかつスカラー曲率一定な2重調和部分超曲面は以下の場合極小。(a) ある有限の $p \geq 2$ に対して、平均曲率の勾配のノルムが L_p 空間に含まれる。(b) 平均曲率の勾配のノルムが L_2 空間に含まれるかつリッチ曲率が下から距離関数の2乗により抑えられている。その系として次を得た。

(6) ユークリッド空間内のスカラー曲率一定な完備2重調和超曲面であり、ある(5)の(a)の条件を満たせば極小。以上の研究は Chen 予想及び BMO 予想の肯定的部分的解決である。更に、Yamabe soliton 及び Ricci soliton 及びそれらの性質を持つ部分多様体の研究を行い、非存在定理を示した。

VII. Ye-Lin Ou, Yu Fu との共同研究により次の結果を得た。

球面と \mathbb{R} の直積多様体内の semi-parallel 2重調和超曲面の分類定理を与えた。特に、totally umbilical な2重調和超曲面及び、平坦な2重調和曲面の分類定理を与えた。totally umbilical 2重調和超曲面については4次元以外の場合に一般的な分類定理があったが、4次元の場合には研究が進展していなかった。本研究では4次元の場合も分類を与えることができおり、今後の2重調和超曲面の研究に有効であると思われる。また、類似の研究を双曲空間と \mathbb{R} の直積多様体内の2重調和超曲面に対しても行った。この研究により、自明でない2重調和超曲面はほぼないであろうことが分かった。更に最大値原理を用いて、次の結果を示した：アインシュタイン空間と \mathbb{R} の直積多様体内のリッチ曲率が非正である完備2重調和超曲面が (a) 平均曲率 H が $L^p, (p \geq 2)$ 空間に含まれる かつ 角度関数に関してある種の積分条件が満たされる, (b) 平均曲率が調和で下からある定数で抑えられている, もしくは, (c) 角度関数が調和かつ超曲面のスカラー曲率が一定である。この時、極小もしくは vertical cylinder である。

更に球面と \mathbb{R} の直積多様体, また, 双曲空間と \mathbb{R} の直積多様体内の semiparallel 2重調和超曲面の分類定理を与えた研究を発展させた研究を行った。特に, semi-parallel の仮定を外すため, 球面と \mathbb{R} の直積多様体内の2重調和回転曲面の研究をスカラー曲率に関するある種の仮定の元で研究を行い, 分類定理を与えることを目標としていた。共同研究により, 2重調和回転曲面が解を持つための必要十分条件を与えることができた。特に次の結果を与えることができた：(1) 球面と \mathbb{R} の直積多様体内の2重調和回転面 $(\sin k(r), \cos k(r)\cos x, \cos k(r)\sin x, h(r))$ において, k が調和関数であるものは極小であるか vertical cylinder $S(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times R$ の一部である。(2) 球面と \mathbb{R} の直積多様体内の flat な2重調和回転面は 極小であるか vertical cylinder $S(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times R$ の一部である。また, 外の空間が球面と \mathbb{R} ではなく, 双曲空間と \mathbb{R} の直積の場合は次の結果を得た：双曲空間と \mathbb{R} の直積多様体内の2重調和回転面 $(\cosh k(r), \sinh k(r)\cos x, \sinh k(r)\sin x, h(r))$ において, (a) k が調和関数である, もしくは (b) 曲面が flat であるものは極小である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Seko Tatsuya, Maeta Shun	4. 巻 136
2. 論文標題 Classification of almost Yamabe solitons in Euclidean spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 97~103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.geomphys.2018.10.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shun Maeta	4. 巻 27
2. 論文標題 Biharmonic submanifolds in manifolds with bounded curvature	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） http://dx.doi.org/10.1142/S0129167X16500890	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Shun Maeta	4. 巻 145
2. 論文標題 Biharmonic hypersurfaces with bounded mean curvature	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1773-1779
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1090/proc/13335	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Shun Maeta	4. 巻 41
2. 論文標題 Construction of triharmonic maps	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Houston J. Math.	6. 最初と最後の頁 433-444
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shun Maeta	4. 巻 143
2. 論文標題 Polyharmonic maps of order k with finite L_p k -energy into Euclidean spaces	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 2227-2234
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2014-12382-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shun Maeta, Nobumitsu Nakauchi and Hajime Urakawa	4. 巻 177
2. 論文標題 Triharmonic isometric immersions into a manifold of non-positively constant curvature	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Monatsh. Math.	6. 最初と最後の頁 551-567
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00605-014-0713-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shun Maeta	4. 巻 66
2. 論文標題 Complete Yamabe solitons with finite total scalar curvature	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 75-81
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2019.05.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Shun Maeta
2. 発表標題 Biharmonic submanifolds in space forms
3. 学会等名 Math Colloquium in Texas A&M University Commerce (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Shun Maeta's Home Page
<https://sites.google.com/site/shunmaetahomepage/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	オウ ワイリン (Ou Ye-lin)	テキサスエーアンドエム大学コマース・Professor	
研究協力者	ロー ヤン (Luo Yong)	武漢大学	
研究協力者	フー ウー (Fu Yu)	東北財経大学	
研究協力者	瀬古 竜也 (Seko Tatsuya)	島根大学	
研究協力者	三浦 友也 (Miura Tomoya)	島根大学	