

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 18 日現在

機関番号：24402

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K17544

研究課題名(和文) Hessenberg多様体のトポロジーと対称群の表現

研究課題名(英文) Topology of Hessenberg varieties and representations of symmetric groups

研究代表者

阿部 拓 (Abe, Hiraku)

大阪市立大学・大学院理学研究科・数学研究所専任研究員

研究者番号：00736499

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：Hessenberg多様体のコホモロジーの環構造について研究を行った。
 (1)A型のregular nilpotent Hessenberg多様体のコホモロジー環を明示的に決定し、それがregular semisimple Hessenberg多様体のコホモロジー環の対称群不変な部分環と環同型であることを証明した。(2)Hessenberg関数が特別な形をしている場合について、A型のregular semisimple Hessenberg多様体のコホモロジー環を明示的に決定した。(3)極小冪零軌道に対するHessenberg多様体のコホモロジー環のある種の表示を与えた。

研究成果の概要(英文)：We studied the ring structures of the cohomology of Hessenberg varieties.
 (1)We explicitly determined the cohomology ring of an arbitrary regular nilpotent Hessenberg variety in Lie type A, and we also proved that it is isomorphic (as rings) to the symmetric group invariant subring of the cohomology ring of the corresponding regular semisimple Hessenberg variety. (2)For a Hessenberg function of special form, we explicitly determined the cohomology ring of the regular semisimple Hessenberg variety in Lie type A. (3)We gave a certain presentation of the cohomology ring of an arbitrary Hessenberg variety for the minimal nilpotent orbit.

研究分野：代数多様体のトポロジー

キーワード：旗多様体 Hessenberg多様体 トーリック多様体 コホモロジー環 対称群の表現

1. 研究開始当初の背景

旗多様体の代数的部分集合の中で特に重要なものとして、幾何学的表現論で研究されてきた「Springer 多様体」や、旗多様体の量子コホモロジー環の研究に現れる「Peterson 多様体」、ルート系とトーリック幾何の繋がりを提供する「ルート系に付随するトーリック多様体」などがあるが、これらを統一的に記述する空間が Hessenberg 多様体である。A 型の Hessenberg 多様体を定義しておく（一般の Lie 型でも定義があるがここでは割愛する）。 $n \times n$ 行列 X と Hessenberg 関数 $h : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ （広義単調増加で各 i に対して $h(i) \geq i$ を満たす）に対し、 (X, h) に付随する Hessenberg 多様体は

$$\text{Hess}(X, h) = \{V \in \text{Fl}(\mathbb{C}^n) \mid XV_i \subset V_{h(i)}, 1 \leq i \leq n\}$$

によって定まる旗多様体 $\text{Fl}(\mathbb{C}^n)$ の代数的部分集合である。一般に、Hessenberg 多様体 $\text{Hess}(X, h)$ の幾何やトポロジーは、行列 X の性質に大きく依存し、 X を取り替えるごとに様々な空間が現れる。

A 型では、任意の Hessenberg 多様体は affine paving を持つことが知られており、コホモロジーが捻れを持たないことや、ベッチ数の組み合わせ論的な公式などは知られていた。一方で、Hessenberg 多様体のコホモロジーの環構造については（特別なケースを除いて）明示的な表示が知られていなかった。

2. 研究の目的

Hessenberg 多様体のコホモロジーの環構造を調べるのが本研究の目的である。本研究で主に扱った問題について、以下で詳しく述べる。

ジョルダン細胞が 1 つの冪零行列を N と書くとき、 $\text{Hess}(N, h)$ を regular nilpotent Hessenberg 多様体という。この Hessenberg 多様体は、 $h(i) = n$ ($1 \leq i \leq n$) とすると旗多様体自身であり、 $h(i) = i + 1$ ($1 \leq i < n$) とすると Peterson 多様体になり、特に興味を持たれている Hessenberg 多様体の一種である。Peterson 多様体の（有理係数）コホモロジー環は福川由貴子氏、原田芽ぐみ氏、柘田幹也氏らの研究によって、環構造の明示的表示が与えられていた。そこで、本研究の第一の問題として、 $\text{Hess}(N, h)$ のコホモロジーの環構造を明示的に与えることが挙げられる。

また、相異なる n 個の固有値を持つ行列を S と書くとき、 $\text{Hess}(S, h)$ を regular semisimple Hessenberg 多様体という。この Hessenberg 多様体は、 $h(i) = n$ ($1 \leq i \leq n$) とすると旗多様

体自身であり、 $h(i) = i + 1$ ($1 \leq i < n$) とするとルート系に付随するトーリック多様体になる。旗多様体は対称群が自然に作用するが、一般に $\text{Hess}(S, h)$ はこの作用で保たれない。しかし、実はコホモロジー環 $H^*(\text{Hess}(S, h))$ 上には対称群の（非自明な）表現を構成することができる。これが J. Tymoczko によって知られていた。本研究の第二の問題は、nilpotent と semisimple の橋渡しを与えることである。正確に述べると、環としての自然な同型

$$H^*(\text{Hess}(N, h); \mathbb{Q}) \cong H^*(\text{Hess}(S, h); \mathbb{Q})^{\mathfrak{S}_n} \quad (*)$$

を確立することである。ここで、「自然な」というのは旗多様体のコホモロジー環からの制限写像と両立するという意味である。空間そのものについては $\text{Hess}(N, h)$ と $\text{Hess}(S, h)$ の間には自然な連続写像がないので、上記の写像があること自体、非自明な現象であると考えられる。例えば、Hessenberg 関数 h として $h(i) = i + 1$ ($1 \leq i < n$) をとると、上記の問題は Peterson 多様体のコホモロジー環とルート系に付随するトーリック多様体のコホモロジー環の \mathfrak{S}_n 不変部分環の間の同型を意味する。

一方、(*) の同型は $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー環の一部分しか見ていない。そこで、第三の問題は、（対称群不変部分環だけでなく） $\text{Hess}(S, h)$ のコホモロジー環そのものの構造を明示的に決定することである。先でも述べたように、 h をうまく選ぶことで $\text{Hess}(S, h)$ として旗多様体やトーリック多様体が現れるので、そのコホモロジー環を明示的に決定することは大変興味深い。

また、 N' として極小冪零軌道上の冪零行列をとるとき、Hessenberg 多様体 $\text{Hess}(N', h)$ を考える。この Hessenberg 多様体は、冪零行列から定義される Hessenberg 多様体のクラスの中で、先の $\text{Hess}(N, h)$ と対極を成すものと言ってよい。また、この Hessenberg 多様体 $\text{Hess}(N', h)$ には一般線形群 $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ のボレル部分群が作用しており、いくつかの Schubert 多様体の和集合として実現される。この Hessenberg 多様体のコホモロジー環の構造を調べることが第四の問題である。

3. 研究の方法

本研究においては、Hessenberg 多様体のコホモロジー環を調べるための手法として、固定点がある有限個であるようなトーラス作用を考察し、「トーラス同変コホモロジーを詳しく調べることで通常のコホモロジーの情報を得る」という変換群的な手法を用いた。

例えば、 $\text{Hess}(N, h)$ は固定点がある有限個になるような S^1 作用を持っており、その同変コホモロジー $H_{S^1}^*(\text{Hess}(N, h); \mathbb{Q})$ の構造を詳細に

調べ、その結果として、通常のコホモロジー $H^*(\text{Hess}(N, h); \mathbb{Q})$ の環としての明示的な表示が得られた。

一方、 $\text{Hess}(S, h)$ は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ に自然に作用する n 次元トーラス T^n の作用の下で保たれており、その同変コホモロジー $H_{T^n}^*(\text{Hess}(S, h); \mathbb{Z})$ は GKM 表示と呼ばれる組み合わせ論的な表示を持つ。まずこのトーラス同変コホモロジーの GKM 表示を詳しく調べ、通常のコホモロジー $H^*(\text{Hess}(S, h); \mathbb{Z})$ についての結果を得た。

また、極小冪零軌道上の Hessenberg 多様体の研究では、ボレル部分群の作用とトーラス作用の両者を考察することでこの Hessenberg 多様体の幾何・トポロジーを調べた。

4. 研究成果

(1) A 型の regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環 (有理数係数) を明示的に決定し、さらにそれが regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環の対称群不変な部分環と環同型であること (すなわち、(*) の同型) を証明した。原田芽ぐみ氏、堀口達也氏、柘田幹也氏との共同研究。

(2) Hessenberg 関数が $h = (h(1), n, \dots, n)$ という形をしている場合について、A 型の regular semisimple Hessenberg 多様体のコホモロジー環 (整数係数) を明示的に決定し、複素数係数における対称群の表現の既約分解も決定した。堀口達也氏と柘田幹也氏との共同研究。

(3) 極小冪零軌道上の Hessenberg 多様体の既約成分やポアンカレ多項式などを調べ、さらに、旗多様体のコホモロジー環からこの Hessenberg 多様体のコホモロジー環への制限写像が全射であることを用いて、コホモロジー環のある種の表示を与えた。Peter Crooks 氏との共同研究。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件すべて査読有)

- ① Hiraku Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, The cohomology rings of regular semisimple Hessenberg varieties for $h = (h(1), n, \dots, n)$, to appear in Journal of Combinatorics (2018).
- ② Hiraku Abe, M. Harada, T. Horiguchi, M. Masuda, The Cohomology Rings of

Regular Nilpotent Hessenberg Varieties in Lie Type A, Int. Math. Res. Not., (2017), DOI: 10.1093/imrn/rnx275.

- ③ Hiraku Abe and P. Crooks, Hessenberg varieties for the minimal nilpotent orbit, Pure Appl. Math. Q., **12**(2) (2016), 183–223.

[学会発表] (計 11 件)

- ① 阿部拓, 正則半単純なヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環について, 日本数学会 2018 年度年会, 東京大学, 2018 年 3 月.
- ② Hiraku Abe, Hessenberg varieties I, Toric topology in Osaka 2017, Osaka City University, Dec. 2017.
- ③ Hiraku Abe, Cohomology of Hessenberg varieties and representations of symmetric groups, International Festival in Schubert Calculus, Sun Yat-sen University, Nov. 2017.
- ④ Hiraku Abe, Extensions of pavings by affines of Peterson varieties, Young Researchers in Homotopy Theory and Topic Topology, Kyoto University, Aug. 2017.
- ⑤ Hiraku Abe, The cohomology of Hessenberg varieties and representations of symmetric groups, Geometry and Topology seminar, McMaster university, Feb. 2016.
- ⑥ Hiraku Abe, The cohomology of regular Hessenberg varieties and representations of symmetric groups, A special session on Algebraic Geometry and Combinatorics, AMS Sectional Meeting, Rutgers University, Nov. 2015.
- ⑦ Hiraku Abe, Nilpotent vs. semisimple via representations of symmetric groups, Workshop on Recent Developments in the Geometry and Combinatorics of Hessenberg Varieties, Fields Institute, Jul. 2015.
- ⑧ Hiraku Abe, Representations of symmetric groups on the cohomology of Hessenberg varieties, Toric Topology 2015 in Osaka, Osaka City University, Jun. 2015.
- ⑨ 阿部拓, ヘッセンバーグ多様体のコホモロジー環と対称群の表現, 幾何学・組合せ論に現れる環と代数構造, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 6 月.

⑩ Hiraku Abe, The cohomology of Hessenberg varieties and representations of symmetric group, Symplectic Geometry Seminar, University of Toronto, Jun. 2015.

⑪ Hiraku Abe, The cohomology of Hessenberg varieties and representations of symmetric groups, Topology and Geometric Group Theory Seminar, Cornell University, Apr. 2015.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

阿部 拓 (ABE, HIRAKU)

大阪市立大学・大学院理学研究科・数学研究所専任研究所員

研究者番号：00736499

(2) 研究分担者

なし