様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ６ 月 ２３ 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ１７５４６

研究課題名（和文）指数調和写像を中心とする変分問題

研究課題名（英文）Calculus of variations centered around exponentially harmonic maps

研究代表者
大森　俊明（Omori, Toshiaki）

東京理科大学・理工学部数学科・助教

研究者番号：２０６３８２２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：指数調和写像に関する新しい存在定理をいくつか得ることができた。具体的に述べると，指数調和写像の存在定理を定義域が非コンパクト多様体の場合に拡張し，また，非正曲率多様体へのエネルギーLiouville性を証明した。また，非正曲率多様体への時間発展型指数調和写像方程式の時間大域解の存在を示した。さらに，球面間の同変指数調和写像の無条件存在を証明した。
　また，材料科学の分野からの動機により，必ずしも面の存在を仮定しない空間グラフに対する離散曲面論を構築した。また，次数3または4の有限グラフに対する重要なGoldberg-Coxeter細分列に対するの固有値の解析を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究は，これまでのリーマン多様体間の調和写像の存在理論に対して，指数調和写像を用いるという新しい手法により，統一的な理論の理解を与えたという点において価値がある。
　また，連続曲面の離散化でもなく，必ずしも面の存在を仮定しない次数3の空間グラフに対して離 散曲面論を構築した。この研究は，既存の曲面論の枠にはまらない非多面体曲面を対象にする という点で新しいものである。

研究成果の概要（英文）：Several existence theorems for exponentially harmonic maps are obtained. More precisely, an existence theorem for exponentially harmonic maps in the case that the source manifold is noncompact, and a Liouville-type theorem is also obtained for exponentially harmonic maps with bounded energy whose target has nonpositive curvature. The existence of a time-global solution to a time evolutional equation for exponentially harmonic maps into nonpositively curved manifolds has been proved. Moreover, the existence of a kind of equivariant exponentially harmonic maps between spheres has been proved under without any conditions.
Also, from a viewpoint of the area of material science, some realizations of graphs in the Euclidean space, a discrete surface theory for them, and a continuous limit of their subdivisions are studied. Spectral problems of the Goldberg-Coxeter subdivisions for 3- and 4-valent finite graphs are also studied.

研究分野：幾何解析および離散幾何解析

キーワード：指数調和写像　調和写像　離散曲面　グラフスペクトル

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

調和写像は，写像の微分の自乗ノルムの積分で与えられるエネルギーの停留点となる写像として定義され，最も基本的な幾何学的変分問題として古くから盛んに研究されてきた。特に多様体間の調和写像の存在問題は重要で，値域の幾何やトポロジー，あるいは定義域の次元が深く関係し，種々の存在定理が知られているが，古典的な証明では，それぞれの状況に応じた手法が取られており，統一的な理解はこれまで得られていなかった。そのような背景の中，指数調和写像を用いることで，調和写像の存在理論を統一的に展開することができ，また，広く適用可能な一般的な状況での調和写像の存在定理をも得られると期待されていた。

近年，材料科学と離散幾何学との融合により新たな研究領域が提案されており，実際，カーボン材料やゴム材料などを離散幾何解析・トポロジーの立場から定式化してそれらの物性を予言する研究が進められている。そして材料科学の動機から生まれた問題が数学的に非自明で意味のある問題を生み出し，双方向のフィードバックが活発に行われている。このような背景の中で，離散的な対象である空間グラフがいつ「曲面」に見えるのか，それらに対して正しい「曲面論」を展開できるのか，そしてその「細分列」の連続極限は何か？このような自然な問いが考えられる。

２．研究の目的

本研究では，連続幾何解析と離散幾何解析の視点から，調和写像を中心とする変分問題を取り扱う。

まず，連続幾何解析においては，調和写像の存在問題への新たな方法論として，指数調和写像の近似列による調和写像の構成法を導入する。そして，既知の調和写像の存在定理も視野に入れ，指数調和写像を用いた統一的な存在理論を展開することを目的とする。また，指数調和写像それ自体の解析も行い，指数調和写像に対する境界値問題，および非負曲率多様体上の指数調和函数の Liouville 性の解決を目標とする。

そして離散幾何解析においては，材料科学からの動機による「グラフの標準的な実現」の探索を主題として，調和写像（標準実現）により埋め込まれた空間グラフに対する離散曲面論の展開と，その連続極限の解析を目的とする。

３．研究の方法

指数調和写像とは，写像の自乗ノルムと指数関数との合成の積分で与えられるエネルギーの停留点により定義される。これまでの研究により，多様体がコンパクトの場合，指数調和写像は多様体の幾何に関係なく写像の各連結成分に存在することが知られていた。本研究では，多様体を非コンパクトにまで拡張すべく，境界付き多様体を定義域とする指数調和写像の存在から考察し，定義域の増大に関する指数調和写像列の収束から非コンパクト多様体上の指数調和写像の存在理論を展開した。

また，調和写像の近似列としての指数調和写像列の解析を精密かすべく，時間発展型の指数調和写像方程式（指数調和写像流）を考案し，その解の存在・収束について解析を行なった。

さらに球面間の同変指数調和写像の存在についても扱った。写像に同変性を仮定することにより，指数調和写像の方程式が常微分方程式に帰着される。その方程式の解の存在が無条件に従うことを証明した。

調和写像により埋め込まれた空間グラフに対する離散曲面論では，その法ベクトルの変化に着目し，ガウス曲率及び平均曲率を定義した。面積変分との関係や細分列の収束についても調べた。また，電子計算機を用いて，種々の例に対する数値計算を行い，本研究の理論の妥当性についても議論した。さらに，既存の離散曲面との比較も行い，本研究の位置付けを明確にした。

また，有限グラフの特別なグラフ細分と考えられる Goldberg-Coxeter 構成（以下 GC 構成）のグラフラプラシアン固有値について調べた。クラスタと呼ばれる初期グラフの各頂点に付随するグラフの固有空間を徹底的に調べることにより，GC 構成の固有値の「分布」に迫った。

４．研究成果

上記方法により実際に得られた成果について，各項目別に説明する。

任意の非コンパクト完備リーマン多様体に対して，コンパクトリーマン多様体への任意の指数エネルギー有限な写像と任意のコンパクト集合上でホモトピックな指数調和写像の存在を証明することができた。また，定義域のリッチ曲率が非負かつ値域の断面曲率が非正という仮定の下で，指数エネルギー有限な指数調和写像は定数に限るというリュービル性につても証明することができた。

値域が非正曲率の場合に，コンパクトリーマン多様体間の指数調和写像流の時間大域解の存在を証明した。実際には，曲率の仮定無しに勾配評価が得られたため，高階評価も期待されるが，残念ながらそこまでの証明には至らなかった。

球面間の同変指数調和写像については期待できる存在定理を得ることができた。実際には，多項式増大度を持つ汎関数の停留点である同変 p-調和写像の存在を証明し，その p を無限大にした際の解の評価を得て，同変指数調和写像の存在を証明した。今後は，この同変指数調和写像からなる指数調和写像の列を考察し，球面間の調和写像の存在理論に対する新たな知見を与えるという動機が生まれた。なお，本研究はメアリワシントン大学の Yuan-Jen, Chiang 氏と東北大学の浦川肇氏との共同研究である。

空間グラフに対する離散曲面論については，前述の通り，各頂点における法ベクトルを定義し，第一，第二，第三基本形式からそのグラフのガウス曲率及び平均曲率を定義した。必ずしも面の存在を仮定しないグラフに対する新たな離散曲面論として本研究には意味がある。細分列の収束については、重要な課題であると認識しているが，本研究では意味のある一般論を得るには至らず，いくつかの例に対する数値実験にとどまった。なお，本研究は，東北大学の小谷元子氏と名古屋大学の内藤久資氏との共同研究である。

グラフ細分列の極限を調べるもう一つの視点として，GC 細分のグラフスペクトルの挙動について調べた。GC 細分とは，パラメータ k を持ち，girth を有界に保ちながら頂点数を O(k^2)のオーダーで増やすグラフ細分で，曲面グラフの場合，双対グラフを考えると曲面の特殊な三角形分割に対応している。GC 細分が普遍的に持つラプラシアン固有値を具体的に求めることに成功し，o(k^2)個の固有値が自明な下界 0 と上界（6 または 8）に収束することを示した。また，固有値が存在しうる区間の任意の実数がその固有値によって近似できることも示すことができた。GC 細分の固有値分布の極限分布までは得られることができず，今後の課題である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　2　件）

[1] T. Omori, Exponentially harmonic maps of complete Riemannian manifolds, Manuscripta Math. (2018), 1–8（査読あり）

[2] M. Kotani, H. Naito and T. Omori, A discrete surface theory, Comput. Aided Geom. Des. 58 (2017), 24–54（査読あり）

〔学会発表〕（計　13　件）

[1] 大森俊明，有限グラフの Goldberg-Coxeter 構成のラプラシアン固有値について，若手数学者交流会，科学技術振興機構（JST）東京本部，2019 年 3 月 16 日

[2] 大森俊明，球面間の同変指数調和写像について，リーマン幾何と幾何解析，筑波大学，2019 年 1 月 26 日

[3] 大森俊明，指数調和写像の存在について，第 65 回幾何学シンポジウム，東北大学，2018 年 8 月 30 日

[4] 大森俊明，次数 3 の空間グラフに対する離散曲面論，離散幾何解析とその周辺 2017，CIC 東京，2017 年 12 月 2 日

[5] 大森俊明，指数調和函数に対する Liouville 性，淡路島幾何学研究集会 2017，淡路島国民宿舎慶野松原荘，2017 年 1 月 27 日

[6] 大森俊明，カーボン材料に対する離散曲面論，量子化の幾何学 2016，早稲田大学，2016 年 12 月 10 日

[7] T. Omori, A discrete surface theory for carbon networks，部分多様体・湯沢 2016，湯沢グランドホテル，2016 年 12 月 3 日

[8] T. Omori, A discrete surface theory on 3-valent graphs embedded in the 3-dimensional Euclidean space, The Second China-Japan Geometry Conference, Fujian Normal University, China, 2016 年 9 月 10 日

[9] 大森俊明，3 次元 Euclid 空間内に埋め込まれたグラフに対する離散曲面論，第 63 回幾何学シンポジウム，岡山大学，2016 年 8 月 27 日

[10] T. Omori, A discrete surface theory on 3-valent graphs embedded in 3-dimensional Euclidean space, Spectral Theory of Novel Materials, CIRM, France, 2016 年 4 月 21 日

[11] T. Omori, A discrete surface theory on 3-valent embedded graphs in 3-dimensional

Euclidean space, OCAMI-KOBE-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Integrable Systems, 大阪市立大学数学研究所, 2016 年 2 月 14 日

[12] 大森俊明, グラフに対する離散曲面論, 淡路島幾何学研究集会 2016, 淡路島国民宿舎慶野松原荘, 2016 年 1 月 23 日

[13] 大森俊明, 標準的実現による離散曲面論, 金沢シリーズ第 14 回「多様体上の微分方程式」, 金沢大学サテライトプラザ講義室, 2015 年 11 月 12 日

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：