

令和元年5月15日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K17549

研究課題名(和文)自由確率論の研究とその確率論・組合せ論・表現論への応用

研究課題名(英文) Research on free probability and its applications to probability, combinatorics and representation theories

研究代表者

長谷部 高広 (Hasebe, Takahiro)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：00633166

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：自由確率論は量子物理学の数学(関数解析や作用素環論)から強く動機付けられて派生した分野といえる。その研究対象は「非可換確率変数」と呼ばれるものであり、確率論を参考にして理論が構築されており、多くの場合に確率論との驚異的な対応関係が存在する。本研究では自由確率論の様々な側面、具体的には確率論と対比しながらの極限定理、組合せ論を使ったキュムラント理論の統一的扱い、また対称群の漸近表現論への応用等を研究した。確率論の単なる類似にとどまらず、マルコフ過程や確率分布の研究に新しい方向性を見出すという形で、確率論へのフィードバックとなる研究結果もいくつか得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年の数学においては様々な分野の相互関係が見つかっている。本研究でも分野横断的な側面が強く、確率論、関数解析、組合せ論、複素関数論などの分野を活用して研究が進み、逆にこういった分野への新たな視点を提供することもできた。特にランダム行列やマルコフ過程などのように応用範囲の広い分野に対しても新たな視点が得られた。これによって学術的な交流が活発になり、かつ将来的に成果が社会に還元されるためのポテンシャルとなった。また後継者に研究を伝えていくことで、将来を担う世代の教育にも貢献できる。

研究成果の概要(英文)：Free probability is a field strongly motivated by mathematics of quantum physics (functional analysis and operator algebras). It focuses on "non-commutative random variables". This theory is constructed in analogy with probability theory, and there are surprising correspondences with probability theory. This research project has investigated various aspects of free probability, including limit theorems in comparison with probability theory, unified theory of cumulants, and applications to asymptotic representation theory of symmetric groups. In addition to finding analogy with probability theory, this project created some feedback to probability theory by finding a new aspect of Markov processes and probability distributions.

研究分野：確率論，関数解析学

キーワード：free probability infinite divisibility Levy processes unimodal distributions combinatorics cumulants Markov processes stable distributions

## 1. 研究開始当初の背景

作用素環論に現れる自由群 von Neumann 環を理解するために、Voiculescu は 80 年代に自由確率論を提唱した。作用素環論と確率論との類似性は以前からよく知られていたが、Voiculescu は確率変数の「独立性」という基本的な概念を「自由独立性」という自由群に関連した新しい概念で置換することによって、大きな広がりのある理論を展開した。80 年代の自由確率論は作用素環論の中での一分野という様相だったが、Voiculescu が 1991 年の論文で独立な GUE (Gaussian Unitary Ensemble) の族を適当に正規化して行列のサイズを無限大にすると、極限において自由独立になるということを証明した。この画期的な発見の後、自由確率論のランダム行列への応用が精力的に研究されるようになった。ランダム行列と作用素環論を中心とした数学の諸分野への応用を念頭に置き、自由確率論においては特に確率変数の和や積の研究が行われてきた。自由独立な確率変数の和の確率分布は、確率分布に対する 2 項演算として (加法的) 自由畳み込みと呼ばれ、同様に積の方は乗法的自由畳み込みと呼ばれる。また自由独立な小さい確率変数を数多く足し合わせてバランスをとりながら極限を取った時に現れうる極限分布は「自由無限分解可能性」で特徴付けられることが知られている。

## 2. 研究の目的

主に以下の項目について明らかにすることを目的とする。

### (1) 自由無限分解可能分布.

Belinschi et al. 2011 やこれまでの研究代表者の研究から、2 つの分布のクラスである古典的な無限分解可能分布の集合と自由無限分解可能分布の集合が多くの共通部分を持つことが分かった。この共通部分がどれほどの大きさになるのかということを知りたい。また Benaych-Georges, Cabanal-Duvillard による自由無限分解可能分布を固有値分布として実現するランダム行列モデルをさらに解析したい。

### (2) 乗法的自由畳み込み.

加法的自由畳み込みに比べると、乗法的自由畳み込みに関する研究は少ない。しかしランダム行列の積は応用上も興味を持たれているので、乗法的自由畳み込みの研究に対するニーズはある。具体的な計画としては、畳み込みが計算可能な例を探し、乗法に関する自由無限分解可能性を調べる、古典的畳み込み・プール畳み込み・単調畳み込みを含めた種々の畳み込み演算との関係を探る、などの研究を考えている。

### (3) キュムラントの研究及び組合せ論的な Hopf 代数との関係.

研究代表者は非可換確率論におけるキュムラントの研究を西郷, Lehner, Arizmendi, Vargas と行ってきた。特に Lehner との研究で分かったこととして、(自由) キュムラントの理論を一般化していくと自由リー代数上での Campbell-Baker-Hausdorff 公式についての新たな視点が得られつつある。組合せ論的な Hopf 代数との関係を追求していけばさらに研究が進展するだろうという意見を Lehner と共有している。まずこの論文を完成させることが目標である。特に Connes-Kreimer によって始まった場の量子論へ Hopf 代数を応用する流れがあり、それらの研究を活用してキュムラントの理論との接点を見つけていきたい。

#### (4) 対称群の漸近表現論.

自由確率論を対称群の漸近表現論に応用するというBianeの画期的な研究があったものの、対称群とランダム行列の漸近的自由独立性との関係はまだ明らかになっていないように見える。Okounkovらによる既存の結果を自由確率論の観点から整理したい。また単調畳み込みやブル畳み込みが応用できないかどうかを検討したい。最近、洞がヤング図形上でのマルコフ過程を研究した。そこでは特別なマルコフ過程を扱っているが、より一般のマルコフ過程を考えたい。また洞の論文で解決できなかった問題を解決したい。

### 3. 研究の方法

国内外の研究者と協力して研究を進める。申請者の得意な分野は複素解析・確率論・組合せ論であるから、異なった分野、特に表現論、ランダム行列、作用素環論、群論、数値計算等に詳しい国内外の研究者と交流・意見交換していく予定である。また関連する研究集会に積極的に参加する。

### 4. 研究成果

#### (1) 自由無限分解可能分布

佐久間紀佳, Steen Thorbjornsenとの共同研究で、古典的な正規分布が自由確率論の意味で自己分解可能であることを証明した。これは2011年のBelinschi et al.の結果を強くした定理であるとともに、自由確率論においても正規分布が興味深い役割を持っていることを示唆する結果となっている。先行研究のThorbjornsen-長谷部の結果を合わせると、正規分布に対応する自由Levy過程の任意の時刻における確率密度関数が単峰である(極値点を1つだけ持つ)ことが分かる。今後はさらなる正規分布の性質の解明を行いたい。

Thomas Simon, Min Wangとの共同研究で自由安定分布の様々な性質を明らかにした。特に片側自由安定分布が「クジラ型」という形をしていることを示し、さらに一般にクジラ型の密度関数を持つ分布は無限分解可能であることが分かり、確率論へのフィードバックが得られた。

Kamil Szpojankowkiと共同で、確率論における一般化逆ガウス分布 (generalized inverse Gaussian distribution) の自由確率論版を研究した。特にこの分布は常に自由無限分解可能であるが、パラメータによって自由自己分解可能である場合とそうでない場合があることを示した。なお自由一般化逆ガウス分布はあるランダム行列の固有値分布として現れる (Feral 2006)。

#### (2) 乗法的自由畳み込みに関する研究.

Octavio Arizmendiとの共同研究で、乗法的自由Levy過程の時刻0の近傍での振る舞いが古典的な確率論の場合と類似していることを見つけた。これによって、乗法的自由畳み込みの理解を進展させることができた。またこの研究の副産物として、独立なガウス確率変数を成分に持つような上三角ランダム行列の特異値分布が、サイズ無限大の極限で対数自由安定分布に収束することが分かった。それまでは独立な成分を持つランダム行列やその多項式の固有値分布の極限として知られていた自由安定分布はウィグナーの半円分布とコーシー分布のみであったので、この結果はランダム行列理論の研究者にとってインパクトがあるだろうし、なぜ対数自由安定分布が現れるのかという理由を含めて今後の研究で明らかにされるべきである。

植田優基との共同研究で、自由乗法的畳み込みの下で単位円周上の確率分布の単峰性(おおよそ、確率密度関数がたった1つの極大点と極小点をもつという性質)がどのように変化するかを調べた。特に、単位円周上での自由ガウス分布と対称単峰分布の畳み込みは常に(対称かつ)単峰であることを示した。また古典確率論では実軸において2つの対称単峰分布の畳み込みは単峰であること(Wintner 1936)が知られているが、単位円周における古典乗法的畳み込みに対しても同様の定理が成り立つことが分かった。

### (3) キュムラントの研究及び組合せ論的な Hopf 代数との関係.

Franz Lehnerと取り組んでいたキュムラントの一般論が一通り完成した(論文投稿準備中)。これまで非可換確率論で知られていた様々な独立性に対する統一的な定義を与え、また同時に各独立性に対して定義されていたキュムラントを統一的に定義し、諸性質を示した。また我々の理論と自由リー代数が密接に関係していることが分かり、特に自由リー代数で知られている Baker-Campbell-Hausdorff公式に対する別証明を与えた。自由リー代数におけるHopf代数構造とキュムラントの関係も明らかになった。

### (4) 対称群の漸近表現論の研究.

対称群の漸近表現論の中でも、特にVershik-KerovとLogan-Sheppによるヤング図形のスケールリング極限の解析において、Markov変換という道具が用いられる。Franz-Schleissinger-Hasebe(論文投稿中)においてMarkov変換が単調確率論における「自己分解可能分布」と密接に結びついていることがわかった。このことは単調畳み込みがヤング図形解析の中で果たす役割があることを示唆している。今後はヤング図形への直接的な応用を探りたい。またこの論文は関数論におけるLoewner chainや古典的なマルコフ過程が効果的に活用されているなど分野横断的な内容となっており、他分野への様々な応用も視野に入ってくる。

### (5) その他、上記(1)-(4)に動機付けられて派生した予期せぬ研究について。

(1)に動機付けられて、Jiun-Chau WangとHao-Wei Huangとの共同研究で、自由確率論の2次元への拡張とその畳み込みに関する極限定理に取り組み、2次元の確率論ベクトルに対する極限定理とよく対応することを証明した。

(1)に動機付けられて、植田優希との共同研究で、初期分布をもつ古典的ブラウン運動と自由ブラウン運動の分布の単峰性について様々な性質を見出した。いくつかの結果については初めに自由ブラウン運動の場合に結果を得て、その後古典的なブラウン運動についても同様の問いを立てて、新しい結果を得ることができたという点で、確率論への貢献となった。

(3)に動機付けられて、北海道大学の吉永正彦・宮谷俊典とともに、posetに対するorder polynomial (Stanleyが定義した不変量)とグラフの彩色問題において導入されたchromatic polynomialの研究を行った。もともと、これらの多項式は正の整数を代入したときのみ組合せ論的な意味があるような定義になっているが、実は負の整数を代入しても、数え上げの観点から意味のある整数がになる事がStanleyによって示されていた。今回の研究ではEuler標数を用いて、これらの多項式に負の整数を代入するという操作に対して新しい幾何学的な意味付けを与えた。関連して、辻栄とともにposetに対するorder polynomialを一般化した不変量(これもStanleyが定義した)がposet全体の中の部分クラスであるrooted tree全体において完全不変量

であることを示した (poset全体で見ると完全不変量ではないことはすでに知られている) . この論文の中で打ち出した予想があるのだが , 最近のLiuとWeselcouchのプレプリントにおいてその予想が証明されたようである .

## 5 . 主な発表論文等

[ 雑誌論文 ] ( 計 15 件 )

1. T. Hasebe, T. Simon and M. Wang, Some properties of the free stable distributions, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. (印刷中) (査読あり)
2. T. Hasebe, N. Sakuma and S. Thorbjørnsen, The normal distribution is freely selfdecomposable, Int. Math. Res. Not. IMRN, vol. 2019, Issue 6, 1758-1787. (査読あり) DOI: 10.1093/imrn/rnx171
3. T. Hasebe, H.-W. Huang and J.-C. Wang, Limit theorems in bi-free probability theory, Probab. Theory Related Fields 172 (2018), Issue 3-4, 1081-1119. (査読あり) DOI: 10.1007/s00440-017-0825-6
4. B. Collins, T. Hasebe and N. Sakuma, Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices, J. Math. Soc. Japan 70, No. 3 (2018), 1111-1150. (査読あり) DOI: 10.2969/jmsj/77147714
5. O. Arizmendi and T. Hasebe, Limit theorems for free Lévy processes, Electron. J. Probab. 23, no. 101 (2018), 36 pp. (査読あり) DOI: 10.1214/18-EJP224
6. T. Hasebe and Y. Ueda, Large time unimodality for classical and free Brownian motions with initial distributions, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 15 (2018), 353-374. (査読あり) DOI: 10.30757/ALEA.v15-15
7. 長谷部高広 , 非可換確率論における独立性と無限分解可能分布. 数学 70, no. 3, 296-320, 2018. (査読あり)
8. T. Hasebe, T. Miyatani and M. Yoshinaga, Euler characteristic reciprocity for chromatic, flow and order polynomials, J. Singul. 16 (2017), 212-227. (査読あり) DOI: 10.5427/jsing.2017.16k
9. T. Hasebe and N. Sakuma, Unimodality for free Levy processes, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 53, No. 2 (2017), 916-936. (査読あり) DOI: 10.1214/16-AIHP742

[ 学会発表 ] ( 計 34 件 )

1. T. Hasebe, New developments in free probability and applications, "Monotone increment processes, classical Markov processes and Loewner chains" (CRM, Montreal), 2019年3月29日.
2. T. Hasebe, International Workshop on Conformal Dynamics and Loewner Theory (Tohoku Univ.), "Loewner chains, Markov processes and monotone increment processes", 2018年9月6日.
3. T. Hasebe, 18th Workshop: Noncommutative Probability, Operators Algebras, Random Matrices and Related Topics, with Applications, "Limits of free Levy processes at small time", 2018年7月17日.
4. T. Hasebe, RIMS 共同研究(公開型): 量子場の数理とその周辺 2018, "Unimodality for classical and free Brownian motions with initial distributions", 2018年7月2

日.

5. 長谷部高広, 日本数学会 (代数学, 首都大学東京), 「Order quasisymmetric functionによるposetの分類」, 2017年3月25日.
6. T. Hasebe, Analytic versus Combinatorial in Free Probability (Banff, Canada), "Short time limit theorem for multiplicative free Levy processes", 2016年12月6日 .

その他 28 件

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕  
ホームページ

<https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~thasebe/> (研究代表者の業績が載っている)

プレプリント

1. U. Franz, T. Hasebe and S. Schleichinger, Monotone increment processes, classical Markov processes and Loewner chains. [arXiv:1811.02873](https://arxiv.org/abs/1811.02873) (投稿中)
2. T. Hasebe and F. Lehner, Cumulants, Spreadability and the Campbell-Baker-Hausdorff Series. [arXiv:1711.00219](https://arxiv.org/abs/1711.00219) (改訂中)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様 式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

6. 研究組織

(1)研究分担者 なし

(2)研究協力者

研究協力者氏名：吉永 正彦  
ローマ字氏名：Masahiko Yoshinaga

研究協力者氏名：宮谷 俊典  
ローマ字氏名：Toshinori Miyatani

研究協力者氏名：辻栄 周平  
ローマ字氏名：Shuhei Tsujie

研究協力者氏名：植田 優基  
ローマ字氏名：Yuki Ueda

研究協力者氏名：浅井 暢宏  
ローマ字氏名：Nobuhiro Asai

研究協力者氏名：佐久間 紀佳  
ローマ字氏名：Noriyoshi Sakuma

研究協力者氏名：Benoit Collins  
ローマ字氏名：Benoit Collins

研究協力者氏名：Franz Lehner  
ローマ字氏名：Franz Lehner

研究協力者氏名：Uwe Franz  
ローマ字氏名：Uwe Franz

研究協力者氏名：Sebastian Schleissinger  
ローマ字氏名：Sebastian Schleissinger

研究協力者氏名：Octavio Arizmendi  
ローマ字氏名：Octavio Arizmendi

研究協力者氏名：Hao-Wei Huang  
ローマ字氏名：Hao-Wei Huang

研究協力者氏名：Jiun-Chau Wang  
ローマ字氏名：Jiun-Chau Wang

研究協力者氏名：Kamil Szpojankowski  
ローマ字氏名：Kamil Szpojankowski

研究協力者氏名：Marek Bozejko  
ローマ字氏名：Marek Bozejko

研究協力者氏名：Wiktor Ejsmont  
ローマ字氏名：Wiktor Ejsmont

研究協力者氏名：Thomas Simon  
ローマ字氏名：Thomas Simon

研究協力者氏名：Min Wang  
ローマ字氏名：Min Wang

研究協力者氏名 : Steen Thorbjornsen  
ローマ字氏名 : Steen Thorbjornsen

研究協力者氏名 : Paul Skoufranis  
ローマ字氏名 : Paul Skoufranis

研究協力者氏名 : Yinzheng Gu  
ローマ字氏名 : Yinzheng Gu

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。