様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

KAKENHI 科研費

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ１７５５０

研究課題名（和文）体積保存可微分力学系のエルゴード性とその応用

研究課題名（英文）Ergodicity of volume preserving dynamical systems and its applications

研究代表者
平山　至大（HIRAYAMA, Michihiro）

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：５０４５２７３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：体積を保存する可微分力学系のエルゴード理論における幾何学的手法の拡張について研究を行なった．力学系に付随する葉層対が接触を許容する場合にも，葉層や相空間の次元に関する仮定の下，いわゆるHopf議論を拡張した．応用として，3次元多様体上の非一様双曲型力学系については，ある位相的な条件からエルゴード性が従うことを明らかにした．また位相推移的なAnosov型力学系に位相共役な非一様双曲型力学系のエルゴード性を示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
力学系のエルゴード理論における基本的かつ重要な問題の一つに，与えられた力学系のエルゴード性を判定する問題がある．この問題は，数論的変換が定める力学系などの特殊な場合を除けば，一般に極めて難しい問題である．ところでAnosov型とよばれる可微分力学系については，Hopf議論とよばれる手法により，いわば幾何学的にエルゴード性を示すことができる．本研究ではこの手法を，Anosov型力学系より広範な，そして十分に一般的な力学系について拡張することを目指し，次元に関する仮定の下でこれを実現した．

研究成果の概要（英文）：We studied geometric criteria for the ergodicity of volume preserving dynamical systems. It is widely known that the Hopf argument is a simple but strong method in the ergodic theory of Anosov systems. For a broader class of dynamical systems, called the non-uniformly hyperbolic systems, we extend the method under an assumption on the dimension of the phase space or the associated foliations. As an application, we showed that the ergodicity on every closed three-manifold follows from a topological property of the system. Further, it has turned out that every topological transitive topological Anosov system is ergodic.

研究分野：力学系理論，エルゴード理論

キーワード：エルゴード性　葉層構造

１．研究開始当初の背景

変換の反復合成や流れなど，時間発展する系の定性的あるいは定量的解明が，力学系理論の主要な課題の一つである．系の時間発展において，一般には非常に複雑な軌道が出現するが，そのことが統計的にはよい性質として反映されることがあり，それを研究するのが力学系のエルゴード理論である．

力学系のエルゴード理論における重要な問題の一つにエルゴード性の問題がある．それは，力学系とその作用で不変な測度が与えられたときに，この系のエルゴード性を判定する（あるいは判定条件を与える）問題である．エルゴード性は，確率論的混合度合いを表す種々の性質のうち弱い性質であり，その意味では基本的な性質と言える．しかしながら，与えられた変換がエルゴード的であることを示すのは，数論的変換などの特殊な場合を除けば，一般に極めて難しい問題である．ところでAnosov型とよばれる可微分力学系については，付随する葉層構造を用いて，いわば幾何学的にエルゴード性を示すことができる．この手法はHopf議論とよばれ，より一般の可微分力学系への拡張に関する研究が活発になされている．特に，部分的双曲型とよばれる力学系については1990年代頃から系統的な研究が続いており,技術的な仮定の下では議論の拡張が実現されている．他方で，非一様双曲型とよばれる力学系については問題が山積していた．ただし，特別な条件をみたす非一様双曲型力学系についてはHopf議論の拡張と呼べるものが本研究代表者によるこれまでの研究（論文（2)）で考案されており，これについては後述する．

２．研究の目的

本研究の目的は，可微分力学系のエルゴード理論におけるHopf議論を，非一様双曲型力学系に対し拡張することである．また，その応用として，閉Riemann多様体上の体積，あるいは体積と同値な確率測度を保つ微分同相写像の反復合成が生成する離散力学系がエルゴード的であるための内在的判定条件を与えることである．

３．研究の方法

Anosov型力学系は，強縮小的葉層と強拡大的葉層とよばれる位相的な不変葉層をもつ．これらは互いに横断的な葉層であり，かつ余方向に関して絶対連続性をもつ．Anosov型力学系のHopf議論は，これらの性質に依るものである．このAnosov型力学系や，次に述べるような，あるクラスの部分的双曲型力学系に対するHopf議論を再検討し,非一様双曲型力学系への拡張について考察した．

部分的双曲型力学系は，大雑把に言えば“中心方向”を許容するAnosov系である．すなわち，Anosov型力学系がもつ強縮小的作用および強拡大的作用に加え，それらの中間的作用をもつ力学系である．特に，中心方向以外についてはAnosov型力学系と同様に強縮小的葉層と強拡大的葉層が付随し，これらはAnosov系の葉層と同様，余方向に関する絶対連続性をもつ．しかしこれらの葉層は，中心方向の存在に起因して，互いに横断的な葉層をなさない点でAnosov型力学系の葉層とは異なる．また，中心方向には一般に葉層が付随せず，たとえ葉層が存在しても絶対連続性をもつとは限らないことも知られている．このような事情から，一般の部分的双曲型力学系についてHopf議論を拡張するには，議論の修正が必要となる．実際，中心方向の固有値に関する技術的な仮定の下ではHopf議論は拡張され,結果的にその仮定をみたすような部分的双曲型力学系のエルゴード性も確立されている．以上のことについて，議論を詳細に検討し，非一様双曲型力学系への拡張の参考にした．

さて非一様双曲型力学系とは，大雑把に言えば，与えられた不変確率測度に関して，ほとんど全ての初期点の軌道についてAnosov型力学系のような挙動をする力学系である．特に，ほとんど全ての初期点において弱縮小的葉層と弱拡大的葉層が付随し，やはり余方向に関する絶対連続性をもつ．しかし，ほとんど全ての点の軌道しか制御されないため，それ以外の初期点ではこれらの葉層対は接触することもあり，そもそも交差をもたないこともある．特に接触交差の存在が，Anosov型力学系の場合に有効なHopf議論を拡張する際の最も困難な問題と考えられる．この問題に対する基本的な考え方は，素朴に言えば，接触交差は無視できることを示すことである．もう少し正確に言えば，接触交差を引き起こさない初期点対が，与えられた不変確率測度の直積に関して測度正で存在することを示すことと言える．この考えを実現するべく，非一様双曲型力学系の葉層について，特に局所的な性質を調べることとした．以下では，単に葉層と言えば，非一様双曲型力学系に付随する弱縮小的葉層あるいは弱拡大的葉層のいずれかを指すこととする．

葉層を適切に局所化すると，その各局所的葉に沿う写像が定義され，これはホロノミー写像とよばれる．この写像はAnosov型力学系の場合でも構成されるものであり，新しいものではない．しかしながら，Anosov型力学系のHopf議論においてホロノミー写像は局所同相となるのに対

し，非一様双曲型力学系の接触交差をもつ葉層対に対しては，その接触交差点の近傍でホロノミー写像は退化しており，結果的に射影しか定めない．すなわち，値域では測度論的に“薄い”集合であっても，その逆像の測度は“大きい”集合になりうる．このことが Hopf 議論拡張における困難の主たる要因である．本研究代表者は，葉層の次元がほとんどいたるところ一定であるような非一様双曲型力学系に対して，付随するホロノミー射影による像集合の測度の評価を既に与えていた（論文 (2)）．さらにこの評価を用いることで，その仮定をみたすような非一様双曲型力学系に対して，Hopf 議論の拡張を確立していた（論文 (2)）．より一般の，すなわち葉層の次元がほとんどいたるところ一定とは限らない非一様双曲型力学系についても，付随するホロノミー射影の像を詳細に調べることとした．

４．研究成果
既に述べたように，Hopf 議論を非一様双曲型力学系に拡張する際の困難は，力学系から定まる葉層構造に付随するホロノミー写像が一般に退化している点に起因する．本研究では，相空間である可微分多様体の次元が高々4 の場合に Hopf 議論の拡張を実現し，エルゴード性の問題についてもいくつかの主張を与えることができた（論文 (1)）．ただし，一般の非一様双曲型力学系についての完全な拡張には至らなかった．以下，これらについて詳しく述べる．

閉 Riemann 多様体上の体積測度，あるいは体積と同値な確率測度を保つ微分同相写像で，その測度に関して双曲的なものを固定する．ここに写像が測度に関して双曲的であるとは，その測度に関してほとんど全ての点でゼロの Lyapunov 指数をもたないことである．この写像の反復合成が生成する力学系を非一様双曲型とよぶ．Anosov 型力学系は非一様双曲型力学系であり，さらに Anosov 型でない非一様双曲型力学系の存在も知られている（1980 Katok）．また Anosov 型力学系を許容しない多様体が存在するのに対し，非一様双曲型力学系は 2 次元以上の多様体上に必ず存在することも知られている（2002 Dolgopyat-Pesin）．このように，非一様双曲型力学系は十分に一般的な力学系である．

さて本研究ではまず，非一様双曲型力学系に付随する弱縮小的葉層と弱拡大的葉層それぞれの元（つまり葉）が交差をもつとき，その交点近傍での局所的弱縮小的葉に沿うホロノミー写像の値域が 1 次元であれば，横断的交点をもつことを示した（論文 (1)）．もう少し詳しく言えば以下のようになる：葉層対が交差を持つとき，その交差が横断的ではなくても，ホロノミー写像の値域が 1 次元であれば，初期点を“少しだけ”取り替えることで，対応する弱縮小的葉と弱拡大的葉が横断的交点をもつようにできる．こうして，横断的交点が一つでも見つかれば，すでに確立していた結果（論文 (2)）により Hopf 議論は拡張される．なおこの主張では，葉層対が交差することを仮定しているが，これについては，主張の応用に触れながら以下に述べる．

既に述べたように，Hopf 議論は可微分力学系の幾何学的なエルゴード理論における基本的な道具とみなすことができる．本研究でも，主として非一様双曲型力学系のエルゴード性問題に応用するため，この議論の拡張について考察してきた．実際に，エルゴード的ではない非一様双曲型力学系が存在する（2001 Dolgopyat-Hu-Pesin）ため，非一様双曲型力学系がエルゴード的であるための内在的判定条件を与えることは重要な問題と考えられる．この問題に対し，本研究で与えた条件は弱縮小的葉層と弱拡大的葉層が交差をもつことである．もちろん，この条件における交差に横断性は要求しない．この条件は，非一様双曲型力学系に付随するという葉層によって記述される点で内在的であり，また上で述べた非エルゴード的非一様双曲型力学系の例（2001 Dolgopyat-Hu-Pesin）が交差条件をみたさないことから一般に外せないものである．

この交差条件のもと，上述した Hopf 議論の拡張は，力学系の相空間である可微分多様体の次元が 4 以下の場合に，非一様双曲型力学系のエルゴード性を導くことを示した（論文 (1)）．また，相空間の次元が 3 以下の場合には，力学系の位相的な条件から交差条件が従うことを明らかにし，結果的にこの場合には，その位相的な条件が非一様双曲型力学系のエルゴード性を導くことを示した．これは 2 次元力学系の場合に知られていた結果（2011 Rodriguez Hertz- Rodriguez Hertz-Tahzibi-Ures，および論文 (2)）を次元に関して拡張するものである．このように，低次元の非一様双曲型力学系については，そのエルゴード性について一般的な結果を得ることができた．高次元の場合については Hopf 議論の拡張が実現できず，非一様双曲型力学系のエルゴード性問題についても一般的な解決には至らなかった．しかしながら，Anosov 型力学系の位相共役類のエルゴード性について，以下のような性質を見いだすことができた：位相推移的な Anosov 型力学系に位相共役な体積保存可微分力学系はエルゴード的である．この主張は次元に依存しないものである．なお Anosov 型力学系は構造安定であるから，微小摂動がエルゴード的であることは直ちに従う．本研究で明らかにしたのは，言わば“巨大な”摂動に関するエルゴード性であり，その点で興味深いと思われる．

高次元の場合にも Hopf 議論を拡張するべく，非一様双曲型力学系に付随する弱縮小的葉層と弱拡大的葉層に関する Lebesgue 密度点を使った議論を援用する方法で，困難の解消を目指した．

この方法により，非一様双曲型力学系がさらに部分的双曲性を持ち，かつその中心方向に沿うLyapunov 指数がすべて負である場合に進展があったものの，完全な解決には至らなかった.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計２件）

(1) Michihiro Hirayama and Naoya Sumi,
On the ergodicity of hyperbolic Sinai-Ruelle-Bowen measures II: the low dimension case,
Ergodic Theory and Dynamical Systems, 38, 2018, 3042--3061, 査読有.
DOI: 10.1017/etds.2016.136

(2) Michihiro Hirayama and Naoya Sumi,
On the ergodicity of hyperbolic Sinai-Ruelle-Bowen measures: the constant unstable dimension case,
Ergodic Theory and Dynamical Systems, 36, 2016, 1494--1515, 査読有.
DOI: 10.1017/etds.2014.124

〔学会発表〕（計 11 件）

(1) 平山至大，可微分力学系の葉層構造とエルゴード性，確率解析の諸相，2018 年.

(2) 平山至大，On the ergodicity of hyperbolic Sinai-Ruelle-Bowen measures, Current Trends in Dynamical Systems and the Mathematical Legacy of Rufus Bowen, 2017 年.

(3) 平山至大，An extension of the Hopf argument in smooth ergodic theory, ジェネラルトポロジーシンポジウム，2016 年.

(4) 平山至大，Several applications of metric property of tangential foliations in smooth ergodic theory, Ergodic Theory and Related Fields, 2015 年.

(5) 平山至大，接触する葉層と力学系のエルゴード性，力学系とその諸分野への応用，2015 年.

６．研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。