2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２４ 日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ１７５５１

研究課題名（和文）調和解析の掛谷問題への応用

研究課題名（英文）Application for the Kakeya problem in Harmonic Analysis

研究代表者
齋藤　洋樹（SAITO, Hiroki）

日本大学・理工学部・助教

研究者番号：２０７３６６３１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は掛谷極大関数の荷重付評価を研究することで,掛谷問題に新しい研究手法を見出そうとするものである.平成27年度から平成29年度までの研究で,一般次元における荷重付掛谷極大関数の有界性を示した.その際の荷重はreverse Holder classに属するものとする. これは1995年のWolffの結果を拡張したものとなっている.
また掛谷問題と関連するHausdorff容量を一般化し,抽象的な2進立方体上で定義されたHardy-Littlewoodの極大関数の有界性を示した.さらに関連する強極大関数の荷重評価を考察し一般の荷重に対し,Fefferman-Stein型の不等式を証明した.

研究成果の概要（英文）：The purpose of this study is to investigate the weighted estimate for the Kakeya maximal oeprator and to find a new technique and contribution for the Kakeya problem. The research from 2015 to 2017, we prove the boundedness of the weighted Kakeya maximal operator in general dimensional space assuming underlying weights belong to the reverse Holder classes. This result is a generalization of Wolff's range in 1995.
Further, we generalized the Hausdorff content to the non-additive measure defined on the abstract dyadic cubes and prove the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator. Finally, we investigate the weighted estimate for strong maximal operator and prove the Fefferman-Stein type inequality with an arbitrary weight.

研究分野：調和解析

キーワード：掛谷問題　極大関数

1．研究開始当初の背景

（1）調和解析，実解析には掛谷問題と呼ばれる未解決問題があり，n 次元 Euclid 空間の部分集合で，「あらゆる方向の単位線分を含む測度零の集合」の Hausdorff 次元を求める問題である．2 次元の掛谷集合の Hausdorff 次元が 2 であることが証明されており，3 次元以上の n の場合にも，Hausdorff 次元は空間次元 n と一致すると予想されているが，未解決である．これは一見すると幾何学の問題であるが，1970 年代に Fourier 解析と結びつくことが明らかにされ，1990 年代になって，偏微分方程式に端を発する解析学の諸問題(波動方程式の局所平滑性の問題，Bochner-Riesz 総和法の予想，Fourier 制限問題など)と関連することがわかり，掛谷問題を解決するために開発される数学の手法がさまざまな科学技術に影響を与えると考えられるようになった．

（2）上述した解析学の諸問題は，掛谷問題を肯定的に解決するための十分条件として知られており，「掛谷極大関数の有界性の予想」もそのひとつである．やはり 2 次元で解決されているが，3 次元以上については「Wolff's range」と呼ばれる，ひとつの最良の結果が知られている．掛谷極大関数は 1:N の長さの比を持つ細長い直方体上の積分平均で定義され，この直方体は単位線分をわずかに膨らませたものと考えることで，掛谷問題との関連が説明される．2 次元で考える場合，技術的には 2 つの長方形の共通部分の面積を評価することに帰着されるが，3 次元以上になると単に 3 つの直方体の共通部分を考える以上の評価を必要とし，非常に難しい問題となる．

（3）本研究の技術的背景には「荷重(weight)」という概念がある．荷重とは荒く言えば非負の関数ということになるが，Schrodinger 方程式の解の平滑化評価などの研究には冪型荷重が重要な役割を果たし，様々な局面で現れる．また，「掛谷極大関数の有界性の予想が正しいならば、Bochner-Riesz 総和法が正しいことを含意する」という逆問題は一見正しいように思えるが，現在の段階でまだ予想であり，ある種の荷重不等式(Fefferman-Stein 不等式)が正しいとすれば，この含意が正しいことが示される．このように荷重理論，特に Fefferman-Stein 型不等式の研究は広範な応用範囲を持つ．

2．研究の目的

（1）本研究は掛谷問題に直接関連する掛谷極大関数の荷重理論を構築することにより，未解決問題に対して新しい研究手法を開発・提案しようというものである．特に先行研究において荷重付極大関数の研究はまだ未発展であり，本研究によっていかなる荷重が有界性を保証するかを調べる．また，Fourier 制限問題の解決が掛谷極大関数の有界性を含意するということが一般の次元で示されているが，荷重付評価はまだ何もわかっていない．このことに対して，我々の研究対象である荷重付掛谷極大関数の有界性を含意するような荷重型 Fourier 制限問題を定式化する．

（2）掛谷極大関数に関連して，他にも極大関数は種々考えられており，方向付極大関数は掛谷極大関数を制御できることで知られている（一般に極大関数とは，幾何学的に興味のある集合上で積分平均をとって定義され，集合は直方体であったり球であったり立方体であったりする）．また強極大関数や分数冪極大関数なども，それらを調べる研究手法は，掛谷極大関数へのアイディアを提供している．一方，近年は Hausdorff 容量を用いた解析がポテンシャル論と関連して調べられている．それは Dirichlet 問題の境界の滑らかさを評価する際に，除外集合を Lebesgue 測度の意味で測るのではなく，Hausdorff 容量で測ることで，より精密な評価が可能だからである．本研究では Hausdorff 容量を一般的な非加法的測度の枠組みで調べ，これによって上述した種々の極大関数の有界性を論じる．これによって，掛谷問題に適用できる Hausdorff 容量を用いた新しい研究手法を開発する．

（3）極大関数を荷重付 Lebesgue 空間で調べる際は Muckenhoupt 型の条件を仮定した研究が進んでいる．この条件を仮定しない場合，Fefferman-Stein 型の不等式を得ることができるが，強極大関数や方向付極大関数に対する不等式は未開発な点が多く，種々の荷重不等式の研究が急務である．

3．研究の方法

（1）荷重付掛谷極大関数の研究においては，1:N の比を持つ細長い直方体の何本かの共通部分の荷重付体積をいかに評価するかが問題となる．Alfonseca，Soria，Vargas らは 2 次元において，2 つの長方形の共通部分に関する面積不等式が掛谷極大関数の有界性を示すキーになることを示し，有界性の証明を簡略化した．我々の過去の研究で，2 次元における荷重付面積公式開発し，Alfonseca，Soria，Vargas らの結果を拡張していた．まずこの公式を n 次元に一般化し，Wolff's range の結果を拡張する．

（2）掛谷問題は上述した特殊な測度零の集合の Hausdorff 次元を問題にするが、それを計算する際 Hausdorff 測度の概念を用いる．実はこれよりも扱いが簡単な Hausdorff 容量という概念も近年積極的に調べられるようになっている．現状は各論で調べられているために包括的な結果がないが，抽象的な 2 進立方体族上で解析することで一般論を構築する．さらに，この結果から掛谷集合の次元との関連を調べる．

掛谷極大関数の有界性を調べる際は関数空間のベースの測度は Lebesgue 測度である

が，Hausdorff 容量によって定まる関数空間上で解析することで新しい解析手法を提案する．その最初の研究として，分数冪積分作用素を Choquet-Lorentz 型空間上でその有界性を調べる．その際，Hausdorff 容量に荷重を付加し，Fefferman-Stein 型の不等式の定式化を試みる．

（3）（1）と関連する問題であるが，現在主流となる荷重問題は，極大関数 M 自体に荷重 w を付加するのではなく，ベースとなる関数空間に荷重を付加して解析することにある．このとき，荷重に Muckenhoupt 型の条件を仮定することが多いが，本研究では任意の荷重に対して考察する．その際，Fefferman-Stein 型の不等式が成り立つことが期待されるが，入力関数 f を制御する荷重付 Lebesgue 空間 $L^p(w)$の荷重は Mw の形とはならず，M に対してなんらかの技術的工夫を必要とする．問題とする極大関数に応じてこの Mw を制御する方法を開発する．

４．研究成果

（1）掛谷極大関数に荷重を付加する場合，n 次元の直方体に荷重付体積を計算する必要があるが，我々の過去の研究で得ていた 2 次元の面積公式を一般の次元に拡張することができた．その際，荷重は reverse Holder class と呼ばれる荷重の集合に属す必要があることがわかった．これにより，2 次元で得ていた結果を拡張するために reverse Holder 型の荷重の性質を精査し，下記の③の論文としてまとめた．これにより，1995 年の Wolff による結果（Wolff's range として知られる現在最良の結果(引用文献①)）を拡張することができた．さらに③では，general maximal operator と呼ばれる最も抽象的な極大関数を考えて議論しており，Muckenhoupt の荷重クラスと，reverse Holder の荷重クラスとの関係を一般的な枠組みで議論している．これは引用文献②の結果をさらに精密にしたものである．

（2）掛谷極大関数は，直方体が 1:N の比を持つ細長い直方体による積分平均で定義される．さらに，この直方体に相似拡大を許すものと，サイズを固定したものがある．過去の研究では相似拡大を許す場合で有界性を示したが，その評価の最良性やサイズを固定した場合については未解決であった（引用文献③）．有界性の最良性とは，その有界定数 $O((\log N)^{\alpha})$に表れる α のオーダーについての問題であるが(O はランダウの記号である)，②によって荷重付の場合の最良性を確かめることができた．その際，あらゆる方向の単位線分を含む面積零の集合が，半径１の円の内部に構成できるという Cunningham の定理(引用文献④)を用いて示した．ただし，最良性を示す際の荷重は冪型荷重という特別な形を仮定しており，一般の荷重に対しても最良性を得ることができるかどうかはまだわかっていない．今後の研究課題となる．

（3）自己相似性を持つ集合のフラクタル次元の問題は解析学の重要な問題であるが，Hausdorff 次元を定義する際 Hausdorff 測度を導入する必要があり，またこれらの計算は一般に容易ではない．（この概念は，例えば現実世界ならリアス式海岸のような極めて複雑な曲線，数学的にはコッホ曲線やシェルピンスキー・ガスケットなどのいわゆる「複雑な図形」の複雑さを定量化しようというものである．Hausdorff 測度は Lebesgue 測度では捉え切れなかった複雑さを測ることができる尺度である．）一方それよりも扱いの簡単な Hausdorff 容量(Hausdorff content)の解析が最近になって盛んに行われている．また，Hausdorff 容量によって Hausdorff 次元を調べることもできる．これまでの先行研究では各論で調べられていたが，一般的な枠組みで議論したものを①としてまとめた．通常の Lebesgue 測度と決定的に異なる点は，Hausdorff 容量が非加法的測度となることである．本研究では抽象的な 2 進立方体を定義することで，既存の研究の技術を活かしつつ一般論を展開することができた．これにより，引用文献の⑤の結果を拡張し，2 進型 Hardy-Littlewood 極大関数の有界性を示すことができた．この結果が掛谷問題にどう影響を与えるかは非常に関心があるところであるが，掛谷極大関数に対しても同様な結果を得ることができるかは非常に難しい問題であり，現在研究を進めている．

（4）荷重付 Lebesgue 空間上の Hardy-Littlewood の極大関数の有界性は，Muckenhoupt によって一般論が構築された．それは $L^p(w)$上の有界性を考える問題である．しかし，2 組の荷重による有界性 $T:L^p(u)\to L^p(w)$型とし，u=Tw の形を調べると，荷重 w に対して条件を緩和することができ，またそれ自体多くの応用を持つ．これを Fefferman-Stein 型不等式という．Hardy-Littlewood の極大関数に対しては荷重が任意の荷重で成立するが，強極大関数については強型 Muckenhoupt 条件の結果しか知られておらず，方向付極大関数については皆無であった．④の論文では荷重に対して何の仮定もおかずに $u=M_1M_2w$ という極大関数の合成として評価できることを示した．この形で Fefferman-Stein 型不等式を証明する研究方針は高い汎用性が期待されており，海外の研究者がこの方法でいくつかの結果を得ている．

（5）Hausdorff 容量による研究は引用文献の⑤と Adams の⑥の成果が大きく，特に Adams は近年にいたるまでの結果がまとめられている．だがそこでは，通常の Lorentz 空間のノルムを Choquet 積分によって定めた関数空間上で分数冪積分作用素の有界性を論じているが，そこでは証明が述べられておらず，またその記述には疑わしい箇所があった．我々はこの点を精査し，さらに引用文献⑦で Tang によって考察されている荷重付

Hausdorff 容量を用いて Adams の結果の正当化と拡張を行った．またその結果は Tang の⑦の結果の拡張にもなっている．Adams が述べている事実は正しかったが，実際の証明は非加法的測度の精緻な技術を必要とするはずで，決して容易なものではない．我々はここで，荷重付 Hausdorff 容量による Fefferman-Stein 型の不等式を開発しており，非加法的測度に対するこの形の不等式はこれまでの研究に見られない新しい視点であると考える．この研究は〔学会発表〕の項目①の研究集会で発表しており，論文としても現在投稿中である．

（６）Hausdorff 容量による極大関数の有界性は，引用文献⑦で示されているように，ポテンシャル論への応用を持つ．だが，掛谷極大関数やそれに関連する極大関数に関する研究はまだ行われていない．そこで引用文献⑤の手法を強極大関数に適用し，その有界性を示す研究に着手し，有界となるための Choquet 空間の指数が，min(1,d)<p という条件の下で成り立つという予想を得ており，まだ論文誌に受理・掲載されていない内容であることを断った上で，〔学会発表〕の①で発表した．現在はこの結果をさらに精査しているが，問題の核心は正しく証明できているものと考えており，近日中に投稿予定である．

（７）当初の研究計画では，Fourier 制限問題に対してしかるべき荷重を付与して，荷重付掛谷極大関数の有界性を含意することができる問題を定式化する方針であったが，従来知られている結果と我々が扱っている極大関数は異なるものであり，荷重付 Fourier 制限問題の定式化は本研究課題の期間中にはできなかった．この問題の解決にはさらに多くの論文の解読の必要性と研究期間が必要であると判断し，上述の（５），（６）の研究方針を取り入れたことをここに報告する．

＜引用文献＞

① T.Wolff, An improved bound for Kakeya type maximal functions、Rev. Mat. Iberoam、1995、651–674.

② D.Cruz-Uribe and C. J. Neugebauer、The structure of the reverse Holder classes、Trans.Amer. Math. Soc. 1995, 2941–2960.

③ H.Saito and H.Tanaka, Directional maximal operators and radial weights on the plane. Bull.Aust. Math. Soc. 2014, 397-414.

④ F.Cunningham, The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets, Amer. Math. Monthly, 1971, 114-129.

⑤ J.Orobitg and J.Verdera, Choquet integrals, Hausdorff content and the Hardy–Littlewood maximal operator, Bull. Lond. Math. Soc. 1998 145–150.

⑥ D.R.Adams，Choquet integrals in potential theory, Publ.Mat. 1998, 3-66.

⑦ L.Tang, Choquet integrals, weighted Hausdorff content and maximal operators, Georgian Math. J. 2011, 587-596.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計４件）

① 齋藤洋樹、田中仁、The Fefferman-Stein type inequalities for strong and directional maximal operators in the plane、Canad. Math. Bull.、61 巻, no.1、2017、191-200.

② 齋藤洋樹、田中仁、General maximal operators and the reverse Holder classes、Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.、査読有、42 巻, no.1、2017、367-391.

③ 齋藤洋樹、田中仁、渡辺俊一、Abstract dyadic cubes and the dyadic maximal operator with the Hausdorff content、Bull. Sci. Math.、査読有、140 巻、2016、757-773.

④ 齋藤洋樹、澤野嘉宏、A note on the Kakeya maximal operator and radial weights on the plane、Tohoku Math. J.、査読有、68 巻, no.2、2016、639-649.

〔学会発表〕（計 11 件）

① 齋藤洋樹，Hausdorff 容量による Choquet-Lorentz 空間上の極大関数の有界性について，RIMS 共同研究 関数空間の深化とその周辺，2018.

② 齋藤洋樹，Maximal operators with the weighted Hausdorff content，第５回東アジア調和解析国際会議，2017.

③ 齋藤洋樹，掛谷の針問題から見る図学と解析学とのつながり，日本図学会 秋季大会，2017.

④ 齋藤洋樹，Maximal operators with the weighted Hausdorff content，日本数学会，2017.

⑤ 齋藤洋樹，Weighted maximal operators and related topics，Interactions between harmonic and geometric analysis，2016.

⑥ 齋藤洋樹，Abstract dyadic cubes, maximal operators and Hausdorff content，日本数学会，2016.

⑦ 齋藤洋樹，The Fefferman-Stein type inequality for the directional maximal operator，第４回東アジア調和解析国際会議，2016.

⑧ 齋藤洋樹，General maximal operators and the Reverse Holder classes，Harmonic Analysis, Geometric Analysis and PDE Workshop，2016.

⑨ 齋藤洋樹，Kakeya maximal operator and radial weights，第４回東アジア調和解析国際会議，2015.

⑩ 齋藤洋樹, Some remarks on the Kakeya

maximal operator and A^*_∞ weights，日本数学会，2015.

⑪ 齋藤洋樹，荷重付掛谷極大関数の有界性について, 第１回 工学院大学数理セミナー，2015.

６．研究組織

(1)研究代表者

齋藤　洋樹（SAITO, Hiroki）

日本大学・理工学部・助教

研究者番号：20736631